

Université Catholique de Louvain



Ecole Polytechnique de Louvain  
Département de Mathématiques Appliquées

# Trafic Autoroutier

Analyse, gestion et stabilité  
au niveau microscopique

François MASSONNET

Travail de fin d'études présenté  
en vue de l'obtention du grade  
d'ingénieur civil en  
mathématiques appliquées

Promoteurs : Pr Georges BASTIN  
Pr Guy CAMPION

Juin 2009

*Je tiens à remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont apporté leur grain de sel à la réalisation de ce travail.*

*En particulier, merci à mes promoteurs Georges Bastin et Guy Champion pour leur disponibilité exemplaire et l'engouement dont ils ont fait preuve pour mon sujet de recherche.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>v</b>
<b>I Modèles microscopiques pour la conduite humaine</b>	<b>x</b>
<b>1 Modèles microscopiques en temps continu</b>	<b>1</b>
1.1 Famille des OVM . . . . .	1
1.2 Autres modèles . . . . .	8
<b>2 Modèles microscopiques en temps discret</b>	<b>9</b>
2.1 Apparition du chaos : le modèle de McCartney . . . . .	9
2.2 Modèle de Cho et Wu . . . . .	10
<b>3 Simulations numériques</b>	<b>18</b>
3.1 Validation de l'implémentation . . . . .	18
3.2 Complexité du programme . . . . .	23
3.3 Cas réaliste : le Carrefour Léonard . . . . .	23
3.4 Diagrammes empiriques $(\rho, v)$ et $(\rho, \rho v)$ . . . . .	26
<b>II Gestion de conduite adaptative</b>	<b>31</b>
<b>4 Systèmes de conduite assistée</b>	<b>32</b>
4.1 Forme générique d'un ACC . . . . .	33
4.2 Modèle de Kesting et al. . . . .	35
<b>5 Stabilité du trafic sous contrôle</b>	<b>46</b>
5.1 Notions élémentaires de stabilité . . . . .	46
5.2 Stabilité linéaire du système global . . . . .	47

5.3	Stabilité asymptotique "semi-globale" . . . . .	55
5.4	Comparaison avec un modèle de conduite naturelle . . . . .	61
<b>III</b>	<b>Jonctions et autoroutes à plusieurs bandes</b>	<b>63</b>
<b>6</b>	<b>Processus de changement de bande</b>	<b>64</b>
6.1	Origine du changement de bande . . . . .	65
6.2	Quelques modèles répandus . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Effets sur le trafic</b>	<b>71</b>
7.1	Rampe d'accès . . . . .	71
7.2	Trafic sur deux bandes . . . . .	78
	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>

# Introduction

## Le nœud du problème

Parmi la population active, deux Belges sur trois utilisent la voiture pour se rendre au travail<sup>1</sup>. D'autre part, 61 % d'entre eux (soit environ 1,5 millions de Belges) arrivent sur leur lieu de travail entre 7h30 et 8h30.

La fourmilière qui se réveille chaque matin a donc tout d'un casse-tête insoluble. Les embouteillages se généralisent à l'entrée des grandes villes et, selon le journal *Le Soir* [22], la vitesse moyenne sur nos routes diminuera de 31 % aux heures de pointe d'ici 2030.

Outre l'agacement que peut provoquer ce ralentissement du trafic, la congestion routière fait perdre du temps aux conducteurs. Ce temps inutilisé est à son tour un manque à gagner en termes de loisirs et de travail, et constitue donc une perte d'argent pour l'Etat. Enfin, l'émission de polluants est accrue par l'alternance marche/arrêt des véhicules. Les impacts psychologique, économique et climatique de cette problématique sont donc réels.

## Les solutions

A tout problème, ses solutions ? La marge de manœuvre qui existe est grande :

- *Agrandir le réseau routier* est sans aucun doute la pire des solutions puisque le problème n'est que repoussé à plus tard.
- *Changer les habitudes* des gens est plus prometteur ; favoriser le télé-travail, inciter à l'utilisation des transports en commun ou encore développer le covoiturage constituent des alternatives viables.
- *Agir sur le trafic* est une autre possibilité. Informer en temps réel les utilisateurs de l'état du réseau, contrôler l'accès aux autoroutes, installer un

---

1. Source : SPF Economie, [23]

système de péages, réserver une bande aux HOV (*High Occupancy Vehicles*, véhicules transportant au minimum deux personnes), installer des limites de vitesse variables ou encore doter les véhicules d'un système évolué de contrôle comptent parmi les solutions les plus populaires.

## Les outils à disposition

Les deux premières des trois solutions présentées ci-dessus requérant une certaine volonté de la part des politiques, des navetteurs et des employeurs, nous nous concentrons dans ce mémoire sur la troisième solution qui est d'ordre plus technologique. Afin de mesurer le comportement d'un flux de véhicules soumis à certaines règles, il est nécessaire de s'en donner une bonne représentation. C'est depuis le travail pionnier de Lighthill et Whitham [17], en 1955, que la communauté scientifique se penche sur la question du trafic routier. L'état de l'art actuel propose trois types de modélisation du trafic correspondant à trois échelles spatiales : les modèles macroscopiques, mésoscopiques et microscopiques.

### Les modèles macroscopiques

A grande échelle, un flux routier peut être assimilé à un liquide s'écoulant dans un canal ou un tuyau. La représentation macroscopique du trafic emprunte donc les notions de densité et de vitesse propres à la mécanique des fluides.

Pour un continuum de véhicules, caractérisé à tout endroit  $x$  et à tout instant  $t$  par sa vitesse  $v(x, t)$  et sa densité  $\rho(x, t)$  (nombre de véhicules par unité de longueur), un principe physique est postulé : celui de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

Il reste à spécifier une loi de constitution, c'est-à-dire exprimer la manière dont la vitesse dépend de la densité. Cette relation peut être explicite (modèle de Lighthill et Whitham, [17]) ou implicite (sous forme d'une seconde EDP, modèle de Aw et Rascle [1]). L'exemple très simple de la Fig. 1 suppose que la vitesse du trafic diminue linéairement lorsque la densité augmente ; le débit est alors optimal pour une densité correspondant à la moitié de la densité maximale possible.

Les modèles macroscopiques sont peu gourmands en temps de calcul et reproduisent de façon performante les ondes de choc, entre autres. Cependant, de par leur nature, ils ne permettent pas d'isoler les comportements individuels.

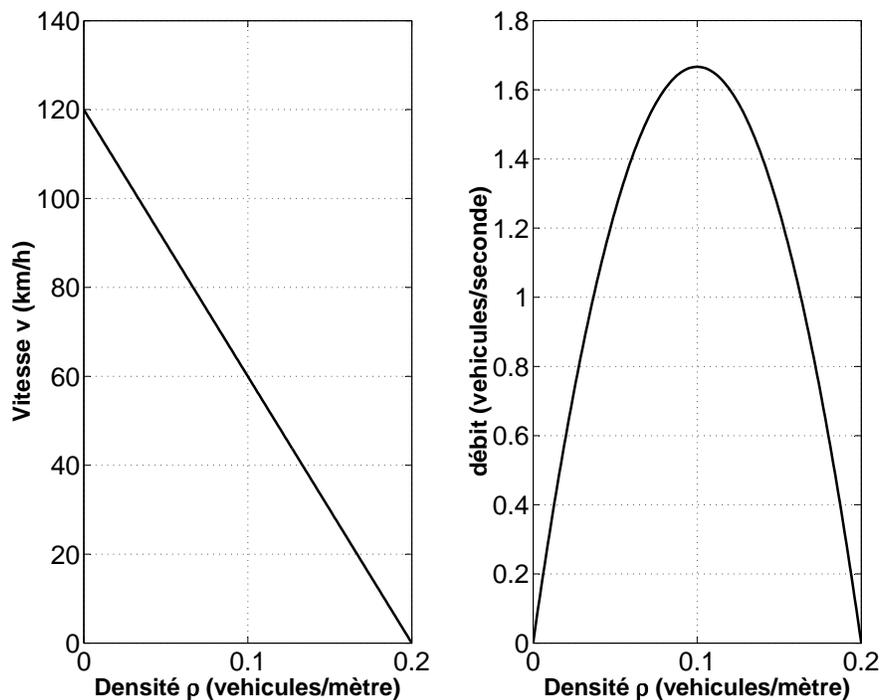


FIGURE 1 – Relation densité/vitesse et densité/débit pour un modèle macroscopique simpliste

### Les modèles mésoscopiques

Comme l'indique leur nom, les modèles mésoscopiques travaillent avec une résolution intermédiaire et s'appuient sur une théorie proche de la cinétique des gaz. Le modèle original [11], dû au Belge Prigogine, utilise une fonction de densité de probabilité  $\tilde{\rho}(x, v, t)$  telle qu'à l'instant  $t$ , le nombre **attendu** de véhicules se trouvant entre  $x$  et  $x + dx$  et ayant une vitesse comprise dans l'intervalle  $[v, v + dv)$  est égal à  $\tilde{\rho}(x, v, t).dx.dv$ .

Pour  $x$ ,  $v$  et  $t$  fixés, cette fonction de densité suit une certaine dynamique :

- Le nombre de véhicules entrant et quittant l'intervalle  $[x, x + dx)$  augmente ou diminue (respectivement) le nombre de voitures attendues ;
- La présence d'utilisateurs roulant à une vitesse inférieure à leur vitesse préférentielle engendre une diminution du nombre de voitures attendues, puisque ces utilisateurs n'ont une vitesse comprise entre  $v$  et  $v + dv$  que

- temporairement ;
- L’interaction entre les véhicules fait diminuer le nombre attendu de véhicules : à la présence d’un véhicule lent (et sous l’hypothèse que les dépassements ne sont pas possibles), la vitesse des voitures du peloton chute et sort de l’intervalle  $[v, v + dv)$ .

Les modèles mésoscopiques ne localisent donc pas avec précision les véhicules, mais tiennent compte des effets d’interaction entre ceux-ci.

## Les modèles microscopiques

La manière la plus détaillée de considérer un flux routier et de considérer individuellement chaque véhicule comme un agent ayant ses propres caractéristiques : les modèles microscopiques associent, à  $N$  mobiles se déplaçant sur la route,  $N$  équations qui comportent, comme on s’y attend :

- une dynamique **temporelle**, qui fait évoluer les véhicules au cours du temps
- une dynamique **spatiale**, faisant interagir les véhicules entre eux.

Les avantages de tels modèles sont indéniables : le point de vue est placé *au sein* du trafic (alors qu’il est placé *à l’extérieur* de celui-ci dans les modèles macroscopiques), mettant ainsi mieux en exergue les termes d’interaction entre les véhicules ; on peut d’ailleurs travailler avec un nombre restreint de mobiles (10, 5 ou même 2) alors que les modèles macroscopiques étudient des flots de centaines voire milliers de véhicules et que les modèles mésoscopiques ne permettent pas de distinguer chaque conducteur. Les modèles microscopiques permettent d’assigner à différents conducteurs différentes caractéristiques, puisque ces conducteurs sont distincts et non fondus dans une masse. Enfin, la modélisation microscopique est la seule porte qui mène vers le contrôle assisté véhicule par véhicule, une question que nous aborderons dans la deuxième partie de ce mémoire.

Il y a cependant un prix à payer : on se doit d’utiliser des paramètres (caractérisant les conducteurs) dont la valeur est variable et mal connue. De plus, les modèles microscopiques sont gourmands en temps de calcul.

## Organisation du texte

Sur base des raisons citées dans le paragraphe ci-dessus, nous avons orienté nos recherches sur l’aspect *microscopique* du trafic autoroutier (la circulation en ville, impliquant ronds points, carrefours et feux de signalisation, n’a pas été traitée).

Ce mémoire est structuré en trois parties :

1. La question de la modélisation de la conduite humaine sur une bande est traitée dans la première partie, à l'aide du formalisme microscopique. Un modèle particulièrement pertinent est investigué théoriquement puis simulé numériquement, permettant de localiser la source des instabilités.
2. Un système de contrôle automatique du trafic sur une bande est présenté à l'occasion de la deuxième partie ; en particulier, une preuve de stabilité globale du système est établie sous certaines hypothèses, garantissant la convergence vers l'équilibre du trafic, et ce pour n'importe quelle condition initiale.
3. Les questions des jonctions et du changement de bande sont abordées dans la troisième et dernière partie. Un modèle est choisi et est couplé au système de contrôle décrit dans la deuxième partie ; la convergence vers un état stable est observée numériquement.

# Première partie

## Modèles microscopiques pour la conduite humaine

# Chapitre 1

## Modèles microscopiques en temps continu

Bien qu'il existe certaines dissidences dans la modélisation microscopique en temps continu, les schémas les plus populaires (mais pas nécessairement les plus judicieux) dérivent d'un modèle "père" : l'OVM (*Optimal Velocity Model*, [26]). C'est sa simplicité et sa capacité à expliquer des phénomènes observés qui ont poussé de nombreux chercheurs ([28], [27], [20], [2], [21], [24], [6]) à le triturer dans tous les sens et à l'améliorer afin d'en gommer les imprécisions. Cependant, d'autres modèles en temps continu existent, bien que plus rares ([3], [19], [13]).

### 1.1 Famille des OVM

#### 1.1.1 Modèle original

Considérons  $N$  véhicules ponctuels numérotés du premier au dernier par ordre croissant  $1, 2, \dots, N$ . Ces véhicules sont en mouvement sur une route *circulaire* (de longueur  $L$ ) où les dépassements sont interdits (Fig. 1.1). Une route circulaire est un cas d'étude intéressant car, de par son aspect périodique, aucun véhicule n'occupe de position préférentielle. Une telle configuration permet donc de reproduire une route linéaire sur laquelle chaque voiture est précédée par une autre (et ainsi reproduire un peloton infini de véhicules). De plus, il est aisé de comparer un modèle sur route circulaire avec une expérimentation réelle<sup>1</sup> et ainsi évaluer

---

1. Vidéo accessible sur <http://www.youtube.com/watch?v=Suugn-p5C1M>, consulté dernièrement le 13 mai 2009

la qualité du modèle.

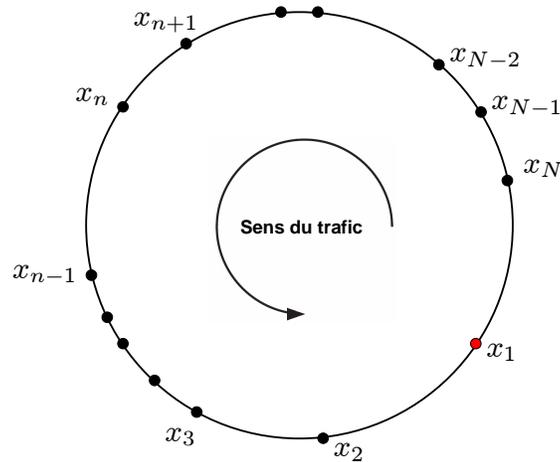


FIGURE 1.1 – Configuration sur une route circulaire à une bande.

On associe au véhicule  $n$  une *vitesse optimale*<sup>2</sup>  $V(\Delta x_n)$  qui dépend de la distance le séparant du véhicule précédent. Le modèle OVM original [26] est décrit par

$$\ddot{x}_n = a \{V(\Delta x_n) - \dot{x}_n\} \quad (1.1)$$

avec  $a$  la *sensibilité* du conducteur (inverse de son temps de réaction),

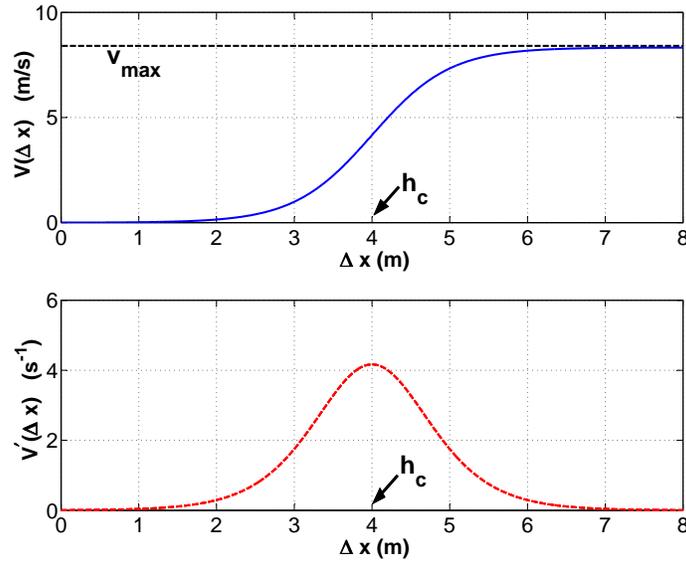
$$\Delta x_n = x_{n-1} - x_n$$

l'écart avec le véhicule précédent et  $V$  une fonction monotone croissante bornée, typiquement [24]

$$V(\Delta x) = \frac{v_{max}}{2} (\tanh(\Delta x - h_c) + \tanh h_c)$$

Un exemple de fonction  $V$  est donné à la Fig. 1.2. Ici,  $h_c$  est une distance de sécurité (typiquement 4 m) en deçà de laquelle l'état du trafic est jugé congestionné. Quant à  $v_{max}$ , il s'agit d'une vitesse limite, par exemple 30 km/h (8,33 m/s) sur une route circulaire. Notons que les véhicules sont assimilés à des points sans

<sup>2</sup>. représentant la vitesse souhaitée de l'utilisateur  $n$


 FIGURE 1.2 – La fonction  $V(\Delta x)$  et sa dérivée.

dimension et qu'il est tout à fait possible que l'espacement entre deux véhicules soit inférieur à  $h_c$ .

La loi d'accélération (1.1) s'interprète comme suit : l'utilisateur  $n$  appuie sur l'accélérateur (représenté par  $\ddot{x}_n$ ) proportionnellement à la différence entre la vitesse qu'il souhaite atteindre et sa vitesse courante ; sa réaction est d'autant plus vigoureuse que sa sensibilité est élevée.

Une analyse de stabilité linéaire est alors réalisée. Une solution homogène de (1.1) est donnée par

$$x_n^{(0)}(t) = \frac{L}{N}n + V\left(\frac{L}{N}\right)t \quad (1.2)$$

Les véhicules sont alors équi-espacés et roulent tous à la même vitesse.

En perturbant légèrement l'équilibre 1.2, c'est-à-dire en posant

$$x_n(t) = x_n^{(0)}(t) + y_n(t),$$

la dynamique linéaire autour de la solution homogène est stable [26] lorsque

$$V'\left(\frac{L}{N}\right) < \frac{a}{2}$$

Cette condition est dérivée en développant la perturbation  $y_n(t)$  en séries de Fourier et en imposant que la croissance temporelle de celle-ci tende vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. A la lumière de la Fig. 1.2, on constate que  $\Delta x = h_c$  est un point critique puisque c'est à cet endroit que  $V'$  est maximale et que la condition de stabilité linéaire est la plus précaire.

Après avoir réalisé cette analyse linéaire, de nombreux auteurs (dont [28], [2], [24]) recherchent des solutions de grande longueur d'onde en introduisant des variables "lentes"

$$X \triangleq \epsilon(n + ct), \quad T \triangleq \epsilon^3 t$$

avec  $\epsilon \ll 1$  et  $c$  une vitesse de propagation à déterminer. On recherche alors les perturbations  $R(X, T)$  autour de l'écart critique  $\Delta x = h_c$  telles que l'écart critique perturbé

$$\Delta x_n(t) = h_c + \epsilon R(X, T) \tag{1.3}$$

soit compatible avec (1.1). Développant cette équation au cinquième ordre pour  $\epsilon$ , on dérive l'équation modifiée de Korteweg - de Vries (mKdV) avec correction d'ordre  $\epsilon$

$$\frac{\partial R'}{\partial T'} - \frac{\partial^3 R'}{\partial X^3} + \left( \frac{\partial R'}{\partial X} \right)^3 + \mathcal{O}(\epsilon) = 0$$

( $T'$  et  $R'$  sont  $T$  et  $R$  mis à l'échelle, respectivement). Après avoir trouvé la solution au premier ordre (la solution de l'équation de mKdV), on utilise une condition de solvabilité pour déterminer la vitesse de propagation de cette solution. La solution "kink-antikink" de cette équation existe analytiquement et est de la forme

$$R(X, T) = A \tanh(B(X - cT)),$$

les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $c$  dépendant entre autres de la sensibilité  $a$  et des conditions initiales. Cette solution se déplace donc à vitesse  $c$  dans le sens contraire du trafic (Fig. 1.3). On note sur ce graphe, pour  $t$  fixé, la coexistence sur le circuit de zones congestionnées ( $\Delta x_n < h_c$ ) et non congestionnées ( $\Delta x_m > h_c$ ) pour certaines voitures  $n$  et  $m$  distinctes.

Par conséquent, en vertu de (1.3), les distance entre deux véhicules (dans le cas critique) oscillent dans l'intervalle  $[h_c - \epsilon A, h_c + \epsilon A]$ . On a donc coexistence, sur le circuit, d'endroits où le trafic est *plus dense* que pour la solution homogène, et d'autres où il est *moins dense*. La Fig. 1.3, représentant la solution de l'équation de mKdV, montre clairement ce phénomène. Le trafic est alors

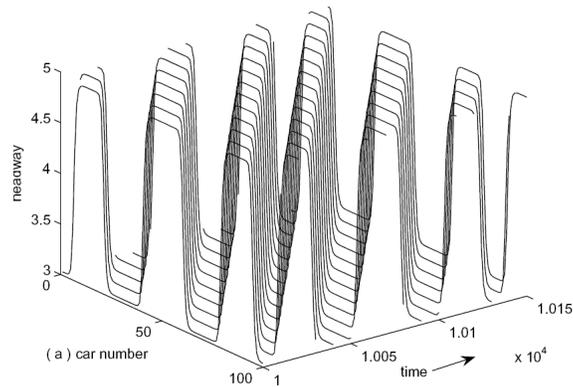


FIGURE 1.3 – Oscillations de l'espace  $\Delta x$  autour de la position critique  $h_c$ .  
Source : [24]

qualifié de "métastable" puisqu'il est composé à la fois de véhicules en situation d'embouteillage et de véhicules en trafic libre.

Un moyen synthétique de résumer l'analyse de stabilité est de déterminer, dans le plan  $(\Delta x, a)$ , les zones pour lesquelles la solution homogène est

- instable (i.e.,  $a < 2V'(\Delta x)$ )
- métastable (i.e.,  $h_c - \epsilon A < \Delta x < h_c + \epsilon A$ )
- stable (i.e.,  $\Delta x < h_c - \epsilon A$  ou  $\Delta x > h_c + \epsilon A$ )

La Fig. 1.4 représente ces états.

Il convient finalement de remarquer que le modèle OVM n'exclut pas les collisions entre véhicules puisque, lorsque  $\Delta x_n$  tend vers 0, l'accélération  $\ddot{x}_n$  tend vers  $-a\dot{x}_n$ , quantité qui peut ne pas être suffisante pour éviter la collision.

### 1.1.2 Autres modèles dérivés d'OVM

Comme mentionné en début de section, la formulation OVM classique (1.1) est très simple et a été déclinée à tout va :

- **en affinant la fonction  $V(\Delta x)$**  : par exemple, Jia et Zhu [28] construisent le "Synthesized OVM", dans lequel  $V(\Delta x)$  tient compte des espacements entre les  $\ell$  voitures précédant la voiture courante. Ils démontrent que la solution homogène est d'autant plus stable qu'on prend en compte un nombre élevé de voitures. Cependant, il paraît peu probable que les conducteurs basent leur conduite sur beaucoup de véhicules autres que le précédent.
- **en ajoutant des termes au modèle original** : Xiaomei et Ziyu [27]

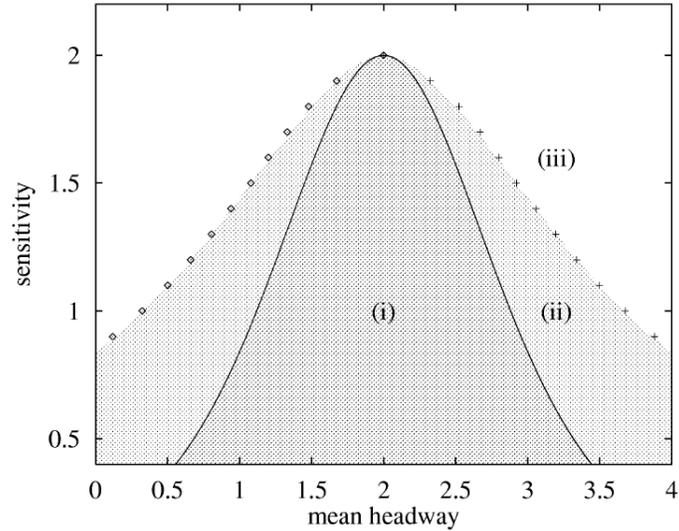


FIGURE 1.4 – Diagramme de stabilité dans le plan  $(\Delta x, a)$ . (i) : zone instable ; (ii) : zone métastable ; (iii) zone stable. Source : [26]

développent un schéma, le "Full Velocity and Acceleration Model" (FVADM) dans lequel l'accélération du conducteur dépend de la différence de vitesse avec son prédécesseur, ainsi que de la différence d'accélération qui les distingue. Si les avantages en simulation sont indéniables (stabilisation plus rapide du trafic autour de la solution homogène), il faut noter qu'un humain est beaucoup moins sensible à des différences d'accélération qu'à des différences de vitesse et que ce modèle n'est donc pas nécessairement pertinent.

- **en combinant les deux améliorations ci-dessus** : Shi et al. [24] construisent une fonction modèle dépendant des  $\ell$  écarts devant la voiture ainsi que de la différence de vitesse avec la voiture du prédécesseur. Ils montrent (Fig. 1.5) que la prise en compte de davantage de voitures réduit la zone d'instabilité par rapport à la solution homogène  $x_n^{(0)}(t)$ . Ce type de modélisation porte le nom de *Cooperative driving system* en ce sens que chaque utilisateur se comporte en mesurant les états relatifs aux voitures les plus proches de lui.

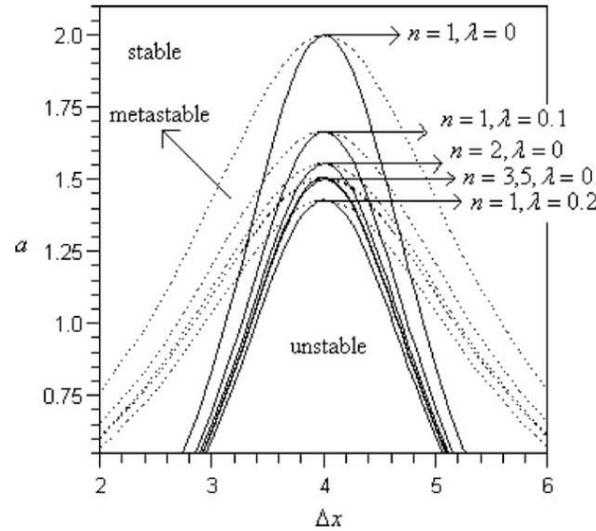


FIGURE 1.5 – Diagramme de stabilité pour un modèle de type OVM amélioré.  $n$  : nombre d'écart pris en compte à l'avant de la voiture courante ;  $\lambda$  : intensité de la réaction face à une différence de vitesse avec le prédécesseur. Source : [24]

### 1.1.3 Commentaires généraux sur les modèles OVM

Quelle que soit leur degré de complexité, les modèles de type OVM présentent des points en commun :

1. Ils possèdent une solution homogène
2. Une condition de stabilité liant la sensibilité du conducteur et la densité moyenne du trafic fournit une condition de stabilité linéaire.
3. On peut avoir coexistence, sur la route circulaire, de trafic congestionné et non congestionné.
4. Un trafic simulé numériquement se stabilise d'autant plus rapidement qu'on considère plus d'interactions entre les véhicules.

Les qualités des modèles OVM sont certaines : ils reproduisent la naissance spontanée d'ondes de choc ; ils font apparaître les phénomènes "stop and go", ou "d'accordéon". Les OVM présentent également une analogie frappante avec un processus bien connu : celui des phases pour un constituant chimique. Si l'on devait assimiler un trafic à des molécules d'eau en mouvement, l'état congestionné représenterait une phase solide ; un état métastable (coexistence de congestion et de trafic fluide) serait assimilé à la transition glace-eau ; enfin un trafic parfaitement stable serait modélisé par de l'eau liquide.

Cependant, aucun des articles parcourus ne compare ces résultats à ceux d'un trafic réel et il est difficile d'évaluer leur pertinence. Les modèles les plus simplistes [26] font subir aux conducteurs des accélérations déraisonnables et supposent qu'ils possèdent tous les mêmes caractéristiques, ce qui évidemment faux.

## 1.2 Autres modèles

Quelques auteurs ([18],[21]) s'inspirent de l'OVM pour établir des liens avec d'autres types de modélisation. Ainsi, Ou [21] reprend le FVDM et développe le terme  $\Delta x$  en terme de la densité de trafic  $\rho$ . Il fait ainsi le pont avec les modèles "fluides" en transformant les  $N$  voitures en un continuum de trafic.

# Chapitre 2

## Modèles microscopiques en temps discret

A quelle fréquence le conducteur actualise-t-il l'état du trafic devant lui ? Manifestement, nous ne sommes pas capables d'ajuster de façon continue l'accélération de notre véhicule (nous regardons dans les rétroviseurs, parlons avec les passagers, pensons à autre chose, . . .). Le simple exemple de prendre un virage est révélateur : nous adaptons à intervalles plus ou moins réguliers l'orientation de notre volant afin de corriger notre trajectoire. C'est cette observation qui a conduit certains auteurs à développer des modèles en temps discret. Un avantage indéniable de cette approche est donc d'une part une modélisation plus réaliste du comportement du conducteur ; d'autre part, la résolution numérique des équations est plus fiable puisque la discrétisation temporelle n'est plus à faire.

### 2.1 Apparition du chaos : le modèle de McCartney

La représentation discrète du temps change substantiellement la nature du trafic et peut même mener à des comportements chaotiques [19] en dépit de l'aspect simplissime des équations.

Dans son article , McCartney [19] considère un ensemble de  $N$  voitures se déplaçant en ligne droite. On suppose donc que la première voiture ("lead car", voiture de tête) impose sa vitesse, notée  $v_j^{(1)}$ , et que les autres la suivent selon une

certaine loi de vitesse simpliste, donnée par

$$v_{j+1}^{(n)} = v_j^{(n)} + \lambda T v_j^{(n)} (v_j^{(n-1)} - v_j^{(n)}) \quad n = 2, \dots, N \quad (2.1)$$

Ici,  $j$  représente l'indice temporel,  $\lambda$  est un paramètre réel et  $T$  est l'intervalle de temps s'écoulant entre deux actions consécutives.

Les points fixes et les cycles de l'application discrète (2.1) peuvent être étudiés et le résultat est présenté en Fig. 2.1. Par exemple, lorsque la première voiture roule à vitesse *constante* normalisée  $v_j^{(0)} = 1$  pour tout  $j$ , les suivantes possèdent un unique point fixe (une vitesse de régime). Le trafic est stabilisé puisque les vitesses de chaque véhicule sont constantes dans le temps. Cependant, lorsque la vitesse constante de la voiture de tête augmente (par exemple  $v_j^{(0)} = 2.25$  pour tout  $j$ ), des cycles apparaissent : la seconde voiture oscille en permanence entre les vitesses 1.5 et 2.5 environ (Fig. 2.1). Des cycles de période 4, 8, 16, etc. surgissent au fur et à mesure que la vitesse constante du meneur est augmentée et l'apparition du chaos est d'autant plus rapide qu'on descend dans la colonne de voitures. Toutefois, comme le souligne McCartney de façon critique, son modèle n'est pas réaliste. En effet, si le premier véhicule se déplace à 120 km/h, il faudrait que les conducteurs suivants actualisent la situation environnante au moins toutes les 3 secondes pour faire naître des comportements chaotiques. Cependant le modèle suivant, plus réaliste, contient le même genre d'instabilités.

## 2.2 Modèle de Cho et Wu

Le second modèle en temps discret que nous abordons est celui initié par Cho et Wu [3]. Plus élaboré que tous les modèles présentés jusqu'ici, il a le mérite de traiter plusieurs cas différents, selon que les véhicules courant et précédent sont à l'arrêt ou en mouvement. Les auteurs s'assurent également que le conducteur ne dépasse pas certaines valeurs limites d'accélération/décélération plausibles. C'est un modèle qui exprime l'état de la voiture par sa *vitesse* et non par sa position. Tout comme dans l'article de McCartney, la colonne de voitures se déplace en ligne droite et c'est le premier véhicule qui adopte la vitesse qu'il souhaite, ceux derrière lui s'adaptant en fonction de certaines lois reprises ci-dessous.

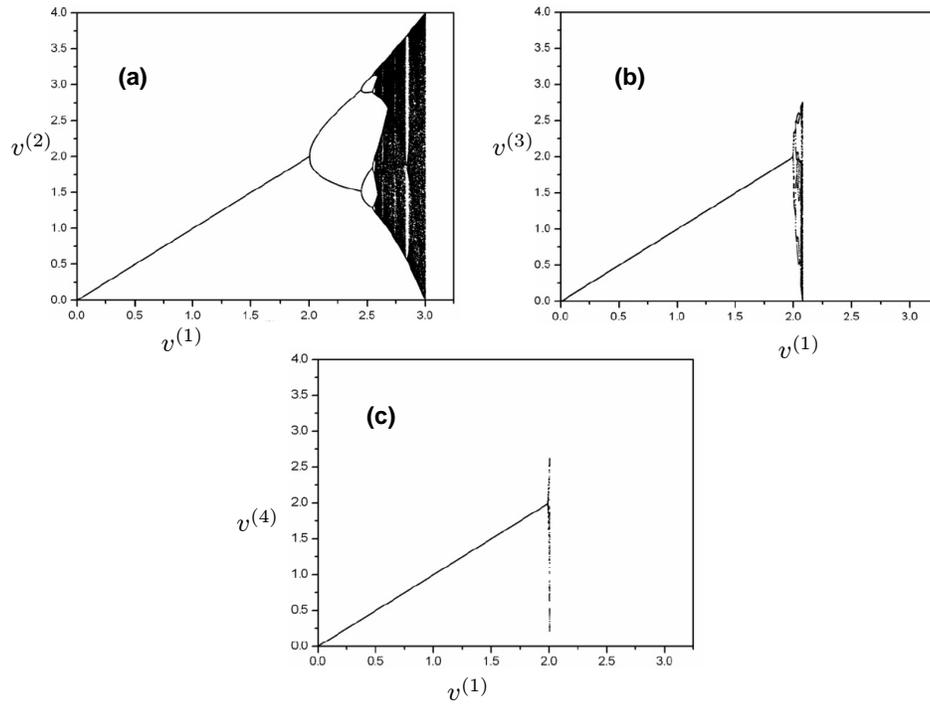


FIGURE 2.1 – Evolution des points fixes et des cycles de (2.1) (vitesse de la seconde (a), troisième (b) et quatrième (c) voitures) en fonction de la vitesse de la première voiture (vitesses normalisées). Source : [19]

## 2.2.1 Présentation du modèle

On considère un ensemble de  $N$  véhicules en file et numérotés  $1, 2, \dots, N$  du premier au dernier. Désignant par  $v_j^{(n)}$  la vitesse du véhicule  $n$  au temps  $j$ , Cho et Wu prescrivent les comportements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{j+1}^{(n)} = v_{des}^{(n)} \left( 1 - \exp \left( -\lambda \frac{(v_j^{(n-1)})^\alpha}{(v_j^{(n)})^\beta} \left( \frac{\Delta x_j^{(n)} - s_n}{L} \right)^\gamma \right) \right) \\ v_{j+1}^{(n)} = v_j^{(n)} - \frac{(v_j^{(n)})^2}{2(\Delta x_j^{(n)} - s_n)} T \\ v_{j+1}^{(n)} = a_{des}^{(n)} T \\ v_{j+1}^{(n)} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{si } v_j^{(n-1)} \neq 0 \text{ et } v_j^{(n)} \neq 0 \\ \text{si } v_j^{(n-1)} = 0 \text{ et } v_j^{(n)} \neq 0 \\ \text{si } v_j^{(n-1)} \neq 0, v_j^{(n)} = 0 \\ \text{et } \Delta x_j^{(n)} \geq z_n \\ \text{si } v_j^{(n)} = 0 \text{ et } \Delta x_j^{(n)} < z_n \end{array}$$

où  $v_{des}^{(n)}$  représente la vitesse désirée par l'utilisateur  $n$ ;  $\Delta x_j^{(n)}$  est l'écart qui sépare la voiture  $n$  de la précédente;  $s_n$  est la distance jugée "de sécurité" par l'utilisateur  $n$ ;  $T$  est le temps s'écoulant entre deux actualisations de l'état du trafic;  $a_{des}^{(n)}$  est l'accélération prise par le véhicule  $n$  à l'arrêt en l'absence de trafic; enfin,  $z_n$  est la distance séparant, à l'arrêt, le véhicule  $n$  du véhicule  $n - 1$ . Quant à  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  et  $L$ , ce sont des paramètres positifs "à calibrer" [3]. L'auteur précise d'ailleurs dans sa conclusion que le modèle est actuellement testé sur le terrain.

Etant donné qu'il existe des limites physiques d'accélération  $a_{max}$  et de décélération  $a_{min}$ <sup>1</sup>, la loi de vitesse est éventuellement adaptée :

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{v_{j+1}^{(n)} - v_j^{(n)}}{T} > a_{max}, & \quad \text{prendre } v_{j+1}^{(n)} = v_j^{(n)} + a_{max}T \\ \text{si } \frac{v_{j+1}^{(n)} - v_j^{(n)}}{T} < a_{min}, & \quad \text{prendre } v_{j+1}^{(n)} = v_j^{(n)} + a_{min}T \end{aligned}$$

### Diagrammes théoriques densité-vitesse et densité-débit

Les diagrammes densité-vitesse et densité-débit sont représentés en Fig. 2.2. Nous avons pris la densité  $\rho$  du trafic comme l'inverse de l'espacement avec la voiture précédente, i.e.

$$\rho = \frac{1}{\Delta x}$$

et tracé les fonctions

$$\begin{aligned} v(\rho) &= v_{des}^{(n)} \left( 1 - \exp \left( -\lambda \left( \frac{1/\rho - s_n}{L} \right) \right) \right) \\ q(\rho) &= \rho \cdot v(\rho) \end{aligned}$$

correspondant respectivement à la vitesse du véhicule et au débit du trafic à cet endroit, selon le modèle de Cho et Wu.

L'allure de ces diagrammes (Fig. 2.2) présente une ressemblance avec celle des modèles macroscopiques (Fig. 1 de l'Introduction) mais il est nécessaire de souligner le fait que ces diagrammes ont été tracés en supposant la vitesse du véhicule précédent fixée. Nous reviendrons sur ce point à la Section 3.4.

#### 2.2.2 Analyse de stabilité

Nous avons souligné ci-dessus l'aspect réaliste du modèle de Cho et Wu qui, de par son implémentation en temps discret et sa loi de commande différenciée

---

1. typiquement,  $a_{max} = 2 \text{ m/s}^2$  et  $a_{min} = -8 \text{ m/s}^2$

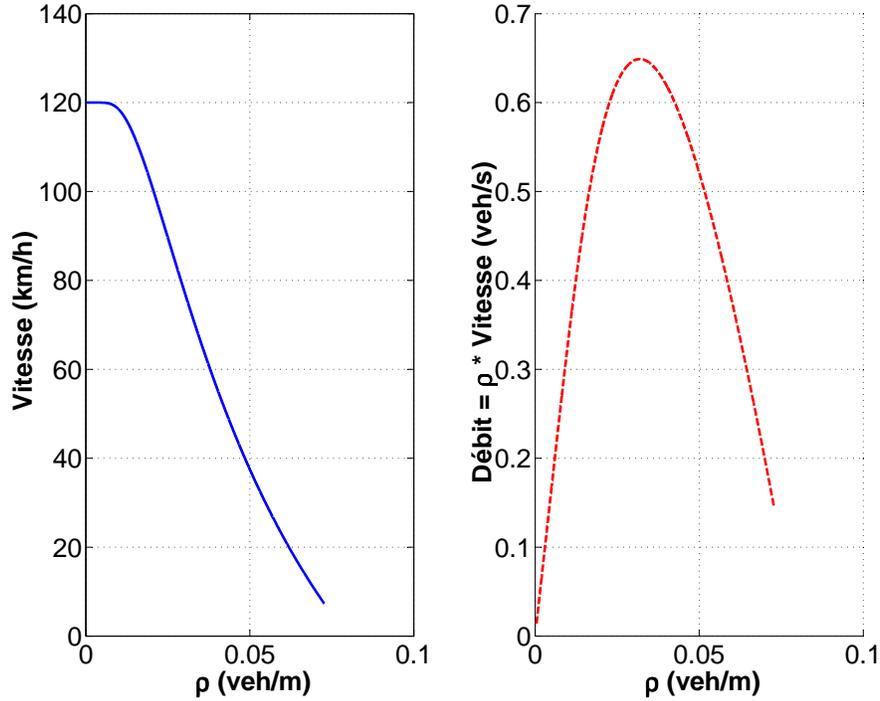


FIGURE 2.2 – Diagrammes théoriques  $(\rho, v)$  et  $(\rho, \rho v)$  pour le modèle de Cho et Wu, avec  $v_{des}^{(n)} = 120$  km/h

selon les vitesses des véhicules impliqués, paraît cohérente. Il reste à discuter la stabilité des solutions d'équilibre et à corroborer numériquement les différents résultats théoriques que nous allons obtenir.

En régime stable, toutes les voitures roulent à vitesse non nulle et c'est pourquoi nous allons uniquement travailler avec la première équation de la loi de vitesse :

$$v_{j+1}^{(n)} = v_{des}^{(n)} \left( 1 - \exp \left( -\lambda \frac{(v_j^{(n-1)})^\alpha}{(v_j^{(n)})^\beta} \left( \frac{\Delta x_j^{(n)} - s_n}{L} \right)^\gamma \right) \right) \quad (2.2)$$

Bien que nous disposions d'une loi de vitesse, il faut encore arriver à décrire la manière dont les espacements entre les véhicules évoluent en un pas de temps. Nous calculons

$$\frac{\Delta x_{j+1}^{(n)} - \Delta x_j^{(n)}}{T} = \frac{(x_{j+1}^{(n-1)} - x_{j+1}^{(n)}) - (x_j^{(n-1)} - x_j^{(n)})}{T}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x_{j+1}^{(n-1)} - x_j^{(n-1)}) - (x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)})}{T} \\
 &= \frac{(x_{j+1}^{(n-1)} - x_j^{(n-1)})}{T} - \frac{(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)})}{T}
 \end{aligned}$$

On reconnaît la vitesse moyenne sur l'intervalle  $[j, j + 1]$  des véhicules  $n - 1$  et  $n$ . Or, par définition, la vitesse moyenne sur  $[j, j + 1]$  est égale à la moyenne arithmétique des vitesses aux pas de temps  $j$  et  $j + 1$ . Il vient donc

$$\frac{\Delta x_{j+1}^{(n)} - \Delta x_j^{(n)}}{T} = \frac{v_j^{(n-1)} + v_{j+1}^{(n-1)}}{2} - \frac{v_j^{(n)} + v_{j+1}^{(n)}}{2}$$

En conséquence,

$$\Delta x_{j+1}^{(n)} = \Delta x_j^{(n)} + \frac{T}{2} \left( v_j^{(n-1)} + v_{j+1}^{(n-1)} - (v_j^{(n)} + v_{j+1}^{(n)}) \right) \quad (2.3)$$

Pour  $N$  voitures en circulation, nous avons donc  $2(N - 1)$  équations spatio-temporelles, représentées par (2.2) et (2.3) (la première voiture faisant office de véhicule de tête, elle roule à sa vitesse préférentielle et n'a personne devant elle).

Soit alors le vecteur d'état

$$\mathbf{x}_j \triangleq [\Delta x_j^{(2)} \quad v_j^{(2)} \quad \Delta x_j^{(3)} \quad v_j^{(3)} \quad \dots \quad \Delta x_j^{(N)} \quad v_j^{(N)}]^T$$

Nous avons donc bien mis notre système sous la forme standard d'un système dynamique en temps discret

$$\mathbf{x}_{j+1} = F(\mathbf{x}_j)$$

et les points fixes  $\mathbf{x}_e$  de ce système vérifient  $F(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$ .

## Equilibre

La notion d'équilibre développée est particulière : les auteurs examinent en réalité la stabilité du véhicule  $n$  en supposant que le précédent,  $n - 1$ , est en situation d'équilibre. Les conditions de stabilité développées ci-dessous sont donc locales puisqu'elles concernent chaque véhicule individuellement, et non le trafic dans sa globalité.

Supposons donc que le véhicule  $n - 1$  soit à l'équilibre : il roule à vitesse  $v_e^{(n-1)}$  indépendante du temps. Afin que l'espacement  $\Delta x_j^{(n)}$  reste constant, il faut donc que la voiture  $n$  roule également à cette vitesse :

$$v_e^{(n)} = v_e^{(n-1)}$$

Quid maintenant de la distance à l'équilibre ? Pour le savoir, considérons (2.2). La voiture  $n$  roule à vitesse constante dans le temps (i.e.  $v_{j+1}^{(n)} = v_j^{(n)} = v_e^{(n)} = v_e^{(n-1)}$ ) si et seulement si

$$v_{des}^{(n)} \left( 1 - \exp \left( -\lambda \frac{(v_e^{(n-1)})^\alpha}{(v_j^{(n)})^\beta} \left( \frac{\Delta x_j^{(n)} - s_n}{L} \right)^\gamma \right) \right) = v_e^{(n-1)} \quad (2.4)$$

Cela nous permet d'avoir une condition sur  $\Delta x_e^{(n)}$ , l'espacement à l'équilibre du véhicule  $n$  :

$$\Delta x_e^{(n)} = L \sqrt[\gamma]{\frac{\ln \left( 1 - \frac{v_e^{(n-1)}}{v_{des}^{(n)}} \right)}{-\lambda (v_e^{(n-1)})^{\alpha-\beta}}} + s_n \quad (2.5)$$

A ce point, il est capital de remarquer que l'équilibre n'a de sens que lorsque la condition

$$\frac{v_e^{(n-1)}}{v_{des}^{(n)}} < 1 \quad (2.6)$$

est réalisée ; si ce n'était pas le cas, l'argument du logarithme serait négatif (impossibilité mathématique) ; physiquement, on assisterait à un espacement croissant entre la voiture  $n$  et la voiture  $n-1$ , puisque  $n$  souhaiterait rouler moins vite que  $n-1$ . L'équilibre ne serait donc jamais atteint.

A supposer que le véhicule précédent est en état d'équilibre, la vitesse et l'espacement du véhicule courant sont donc régis par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} v_{j+1}^{(n)} = f(v_j^{(n)}, \Delta x_j^{(n)}) = v_{des}^{(n)} \left( 1 - \exp \left( -\lambda \frac{(v_e^{(n-1)})^\alpha}{(v_j^{(n)})^\beta} \left( \frac{\Delta x_e^{(n)} - s_n}{L} \right)^\gamma \right) \right) \\ \Delta x_{j+1}^{(n)} = g(v_j^{(n)}, \Delta x_j^{(n)}) = \Delta x_j^{(n)} + \frac{T}{2} (2v_e^{(n-1)} - v_j^{(n)} - v_{j+1}^{(n)}) \end{cases} \quad (2.7)$$

et les équilibres correspondants sont (2.4) et (2.5).

### Matrice Jacobienne

Afin de mener à bien l'analyse de stabilité linéaire de (2.7), calculons les dérivées partielles de  $f$  et  $g$  par rapport à  $v_j^{(n)}$  et  $\Delta x_j^{(n)}$  : on a successivement, à l'équilibre,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial v_j^{(n)}} \right|_{eq} = \frac{\beta}{D_n} (1 - D_n) \ln(1 - D_n)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \Delta x_j^{(n)}} \right|_{eq} &= \frac{-\gamma v_{des}^{(n)}(1 - D_n) \ln(1 - D_n)}{\Delta x_e^{(n)} - s_n} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial v_j^{(n)}} \right|_{eq} &= -\frac{T}{2} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial \Delta x_j^{(n)}} \right|_{eq} &= 1 \end{aligned}$$

où on a posé par simplicité

$$D_n \triangleq \frac{v_e^{(n-1)}}{v_{des}^{(n)}}$$

Remarquons au passage que toutes ces expressions sont indépendantes de  $s_n$ , la distance qui est considérée par le véhicule  $n$  comme "distance de sécurité" ; en effet,  $\Delta x_e^{(n)} - s_n$  ne dépend pas de  $s_n$ .

Les valeurs propres de la jacobienne à l'équilibre,

$$J = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial v_j^{(n)}} \right|_{eq} & \left. \frac{\partial f}{\partial \Delta x_j^{(n)}} \right|_{eq} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial v_j^{(n)}} \right|_{eq} & \left. \frac{\partial g}{\partial \Delta x_j^{(n)}} \right|_{eq} \end{pmatrix}$$

doivent se trouver à l'intérieur du cercle unité du plan complexe afin d'assurer la stabilité de l'équilibre trouvé.

### Conditions de stabilité

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors donnée comme suit : si les conditions

$$\begin{aligned} (1 - D_n)\left(1 - \frac{1}{D_n}\right) &< \exp\left(\frac{1}{\beta}\right) \\ T &< \left(1 - \left(\frac{\beta(1 - D_n) \ln(1 - D_n)}{D_n}\right)^{-1}\right) \left(\frac{2\beta(\Delta x_e^{(n)} - s_n)}{\gamma v_e^{(n)}}\right) \end{aligned}$$

sont vérifiées, le trafic tend asymptotiquement vers son état d'équilibre (pour rappel, un équilibre est asymptotiquement stable s'il est évidemment stable, mais si en plus toutes les trajectoires suffisamment proches de l'équilibre convergent vers celui-ci). En plus de ces conditions, il en existe implicitement une troisième :

$$D_n < 1$$

et ce afin de garantir l'existence de l'équilibre.

Interprétons ce résultat : la première condition exige que le rapport "vitesse du leader/vitesse désirée du véhicule considéré" ne soit pas trop petit, i.e. que les véhicules qui suivent ne soient pas trop pressants derrière leur prédécesseur. La seconde condition repose sur le temps de réaction des conducteurs : si celui-ci est trop grand, l'équilibre ne peut être atteint car les adaptations de vitesse se feront trop lentement par rapport à la constante de temps du système dynamique.

La Fig. 2.3 résume la stabilité du système linéarisé. Pour tous les paramètres fixés à part le temps de réaction et la vitesse désirée de l'utilisateur  $n$ , on constate que l'équilibre est stable si le conducteur  $n$  a un petit temps de réaction et une vitesse préférentielle supérieure à la vitesse de son prédécesseur, mais pas trop élevée quand même (sans quoi on tomberait dans la zone rouge).

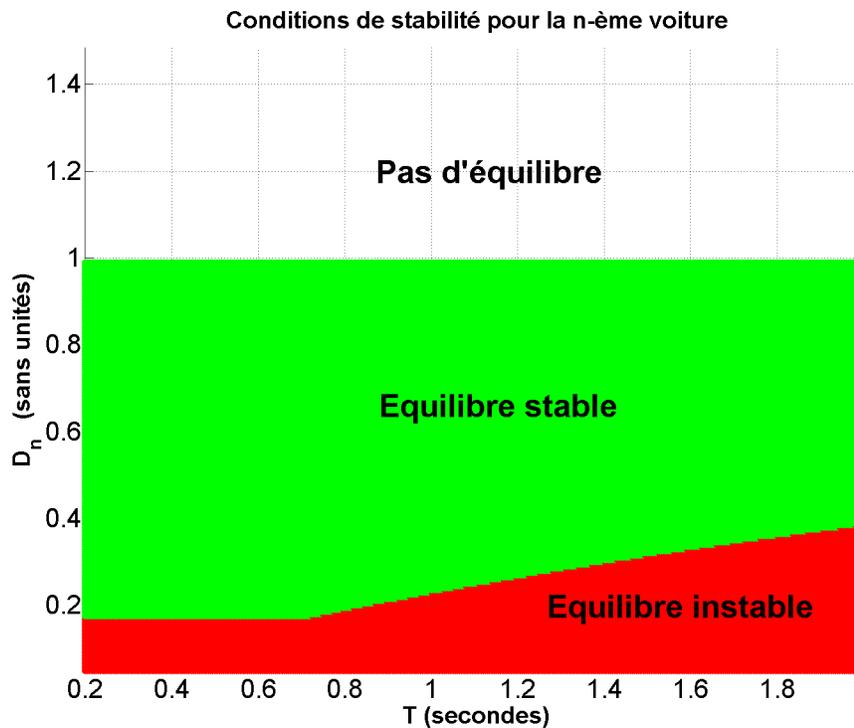


FIGURE 2.3 – Région de stabilité pour la voiture  $n$  (modèle de Cho et Wu)

# Chapitre 3

## Simulations numériques

Comme nous l'avons laissé transparaître dans le chapitre précédent, un modèle attire particulièrement notre attention : celui de Cho et Wu [3] (Section 2.2). Ce choix est motivé par la prise en compte de nombreux facteurs parmi lesquels une affectation *différentielle* (selon les conducteurs) des paramètres de conduite : cette manière de raisonner est en effet bien plus proche de la réalité que les modèles OVM où, par exemple, la vitesse désirée est supposée commune à tous les conducteurs!

Nous avons donc implémenté sous MATLAB les équations de comportement dudit modèle (Section 2.2). L'objectif de ce chapitre se décline en quatre points :

1. Valider notre implémentation en comparant des graphes issus de notre programme avec les graphes proposés dans l'article.
2. Etudier empiriquement la complexité du programme informatique.
3. Appliquer la simulation à un cas d'étude réaliste (le Carrefour Léonard, à Bruxelles).
4. Etablir les diagrammes de vitesse et de débit en fonction de la densité du trafic et les comparer à ceux calculés théoriquement.

### 3.1 Validation de l'implémentation

La structure du programme que nous avons développé est représentée à la Fig. 3.1. La fonction `velocity.m` reproduit la loi de vitesse de Cho et Wu. Les vitesses initiales sont habituellement prises comme étant les vitesses souhaitées des véhicules, et l'espacement initial est typiquement de 100 m. Dans un premier

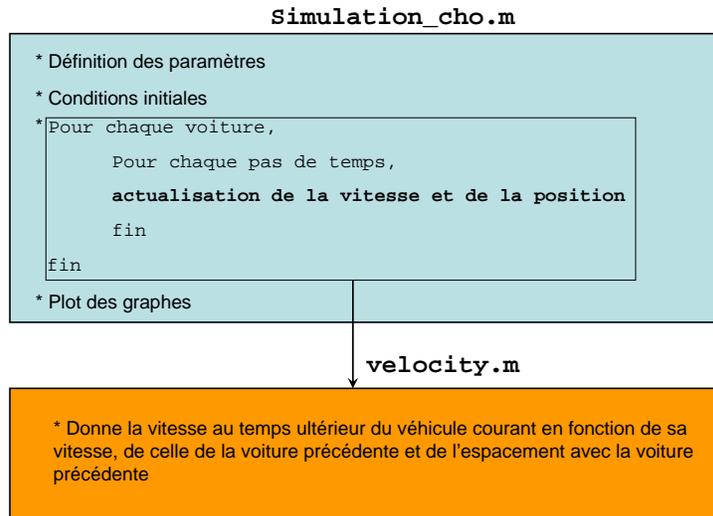


FIGURE 3.1 – Structure du code MATLAB IMPLÉMENTÉ.

temps, nous comparons nos résultats avec ceux de l'article de Cho et Wu [3] pour les mêmes paramètres.

### 3.1.1 Première expérience

Nous nous référons aux deux graphes de Cho et Wu, repris aux Fig. 3.2 et 3.3. Il s'agit d'un écoulement de trafic **stable**. Nous avons repris les mêmes circonstances : 4 voitures avec un temps de réaction  $T = 0.5$  s, des vitesses désirées de 50, 60, 70 et 80 km/h de la première à la dernière, respectivement, des vitesses initiales égales aux vitesses désirées, un espacement initial de 100 m, des accélérations maximum et minimum de 5 et  $-5$  m/s<sup>2</sup> (peu plausible, au passage!), une distance de sécurité uniforme de  $s_n = 5$  m et les mêmes paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  et  $L$  que dans l'article. Seuls deux paramètres n'ont pas été décrits dans l'expérience de Cho et Wu :  $z_n$ , l'espacement en dessous duquel une voiture à l'arrêt reste à l'arrêt, et  $a_{des}^{(n)}$ , l'accélération souhaitée de l'utilisateur  $n$ . Prenons  $a_{des}^{(n)} = 2$  m/s<sup>2</sup> pour chaque conducteur. Pour  $z_n$ , choisissons une valeur acceptable de 8 m. Les résultats sont excellents comme le montrent les Fig. 3.4 et 3.5.

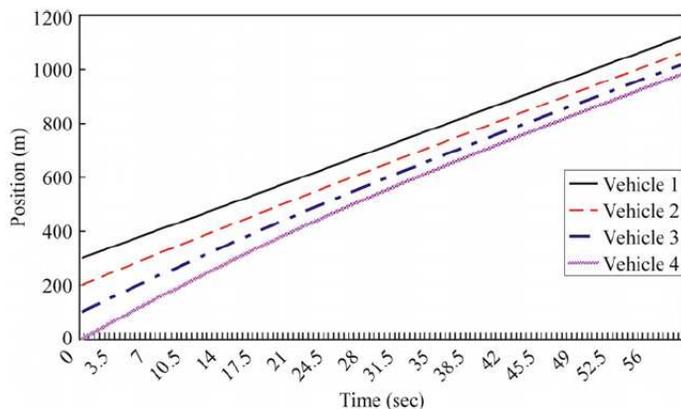


FIGURE 3.2 – Ecoulement de trafic stable pour 4 véhicules (source : [3])

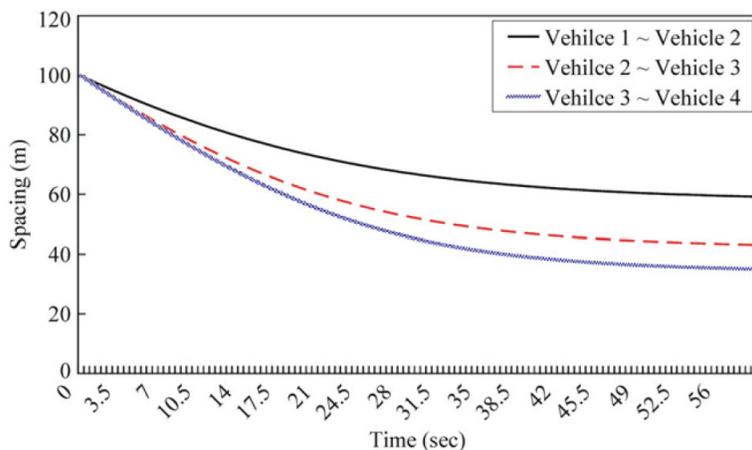


FIGURE 3.3 – Ecoulement de trafic stable pour 4 véhicules (source : [3])

### 3.1.2 Deuxième expérience

Tentons maintenant de modéliser une instabilité. On se place, à nouveau, dans les mêmes circonstances que celle de l'article : on fait rouler 7 voitures ; la première a une vitesse désirée de 5 km/h tandis que celle qui la suivent ont une vitesse préférentielle de 90 km/h (et ce, afin de simuler le comportement de

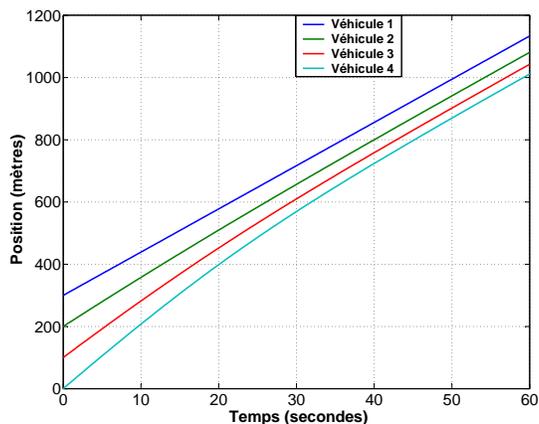


FIGURE 3.4 – Position de 4 véhicules pour une situation stable. A comparer avec la Fig. 3.2

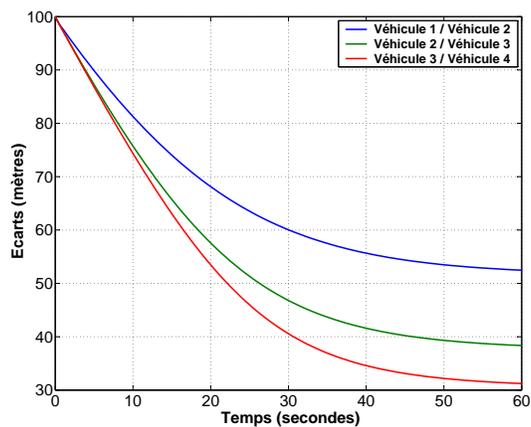


FIGURE 3.5 – Espacement entre 4 véhicules pour une situation stable. A comparer avec la Fig. 3.3

conducteurs agressifs coincés derrière un conducteur beaucoup plus lent). Comme aucun dépassement n'est permis, on s'attend à des comportements chaotiques de la voiture 2 à la voiture 7. L'espacement initial est de 150 mètres.

Le résultat est montré en Fig. 3.7. Bien qu'il soit différent du graphe obtenu par Cho et Wu (Fig. 3.6), il présente des caractéristiques semblables : fortes oscillations de vitesse entre 0 km/h et 20 km/h ; évolution désordonnée de la vitesse ;

arrêts réguliers. L'écart entre notre courbe et celle de l'article peut sans doute s'expliquer de deux manières : tout d'abord par le fait qu'une petite erreur numérique s'amplifie avec le temps, et qu'il est donc possible d'avoir des graphes différents après 300 secondes, comme c'est le cas ici. L'autre raison est que, comme expliqué dans la première expérience, deux paramètres n'ont pas été spécifiés par les auteurs de l'article.

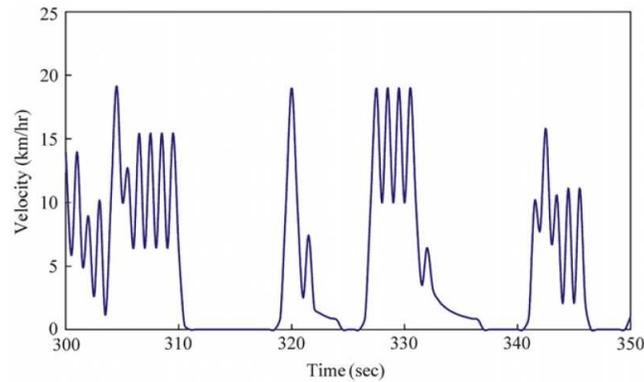


FIGURE 3.6 – Ecoulement de trafic instable pour 4 véhicules (source : [3])

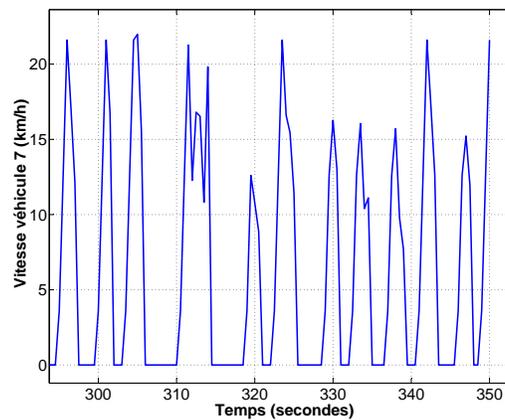


FIGURE 3.7 – Vitesse du septième véhicule pour un trafic instable. A comparer avec la Fig. 3.6

## 3.2 Complexité du programme

Pour une batterie de 9 expériences (nombre de voitures  $N = 50, 100, 500$  et nombre d'itérations temporelles  $k = 500, 1000, 2000$ ), nous avons enregistré le temps d'exécution du programme. Ce temps,  $t^*$ , suit approximativement la loi suivante :

$$t^* \approx \frac{Nk}{10000}$$

C'est une bonne nouvelle : pour un paramètre fixé, le temps d'exécution est une fonction linéaire de l'autre paramètre. Lorsque nous souhaiterons modéliser l'approche d'un flot de 1000 véhicules vers Bruxelles, pendant 1000 secondes avec un pas de temps de  $T = 0.5$  s, il faudra donc un temps de calcul approximatif de

$$t^* \approx \frac{1000 \times \frac{1000}{0.5}}{10000} = 200 \text{ s,}$$

ce qui constitue une valeur raisonnable.

## 3.3 Cas réaliste : le Carrefour Léonard

A l'approche des grandes villes, les routes se rejoignent par définition. Ces jonctions sont le théâtre de ralentissements puisque chaque utilisateur doit interagir non seulement avec son prédécesseur, mais également avec les véhicules des autres bandes. La modélisation des jonctions (rampes d'accès, changements de bande, ...) ne fait pas l'objet de ce chapitre mais nous y reviendrons dans la troisième partie de ce mémoire ; nous allons simplement nous contenter d'analyser le comportement d'une colonne de voitures, qui ne se dépassent pas, et dont le véhicule de tête est forcé de ralentir. A titre d'exemple, considérons le cas réel représenté à la Fig. 3.8 : à l'approche de Bruxelles, les véhicules venant par la E411 ont deux options lorsqu'ils arrivent au Carrefour Léonard : soit ils continuent tout droit vers le Centre (Auderghem, Ixelles), soit ils empruntent le Ring. Concentrons-nous sur cette seconde option ; afin de monter sur le Ring, il est nécessaire de prendre un virage serré sur la droite. De plus, une centaine de mètres plus loin, la jonction proprement dite a lieu avec le Ring, si bien que la vitesse (de l'ordre de 120 km/h au niveau de la "Tour Smart", un kilomètre avant le carrefour), est soudain ramenée à une valeur de 20 km/h environ.

Voici donc la manière dont nous implémentons cette situation numériquement : au temps  $t = 0$ , une série de  $N = 100$  voitures voyage en convoi ; les vitesses

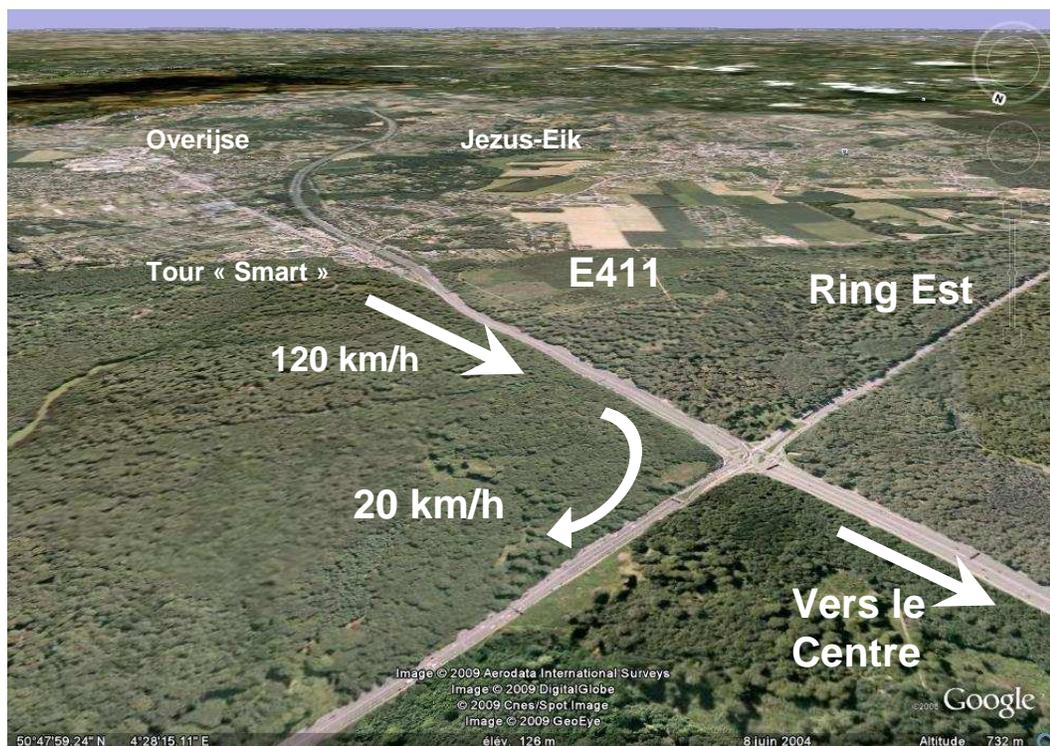


FIGURE 3.8 – Ralentissement forcé à l’approche du Carrefour Léonard (Bruxelles).  
Source : Google Earth (15/05/2009)

désirées de chaque véhicule sont des variables aléatoires uniformément prises entre 115 et 125 km/h (pour refléter différents comportements). L’origine du repère est placée un kilomètre avant le ralentissement (typiquement, près de la ”Tour Smart”). Après avoir parcouru 1 km, la première voiture arrive au niveau du virage où sa vitesse prescrite passe brusquement à 20 km/h. Les voitures derrière elle s’adaptent tant bien que mal. Les accélérations désirées des véhicules sont également des variables aléatoires, distribuées aléatoirement entre 1 et 2 m/s<sup>2</sup> (un camion a, par exemple, une accélération désirée plus faible qu’une voiture de sport). Les accélérations minimum et maximum des véhicules sont comprises entre  $-8$  et 2 m/s<sup>2</sup>, respectivement (le choix de Cho et Wu de prendre  $-5$  et 5 m/s<sup>2</sup> est un peu disproportionné quand on sait qu’un avion de ligne au décollage a une accélération de 2,5 m/s<sup>2</sup>!). Enfin, les distances de sécurité  $s_n$  sont des

variables aléatoires distribuées uniformément entre 5 et 15 mètres (5 m pour les plus agressifs et 15 m pour les plus calmes). Au temps  $t = 0$ , les voitures sont équi-espacées d'une distance de 100 m et roulent à leur vitesse préférentielle. Les temps de réaction sont de  $T = 0.5$  secondes pour chaque conducteur.

Le résultat est tracé à la Fig. 3.9. Dans ce cas-ci, le front de congestion (i.e. l'endroit où les véhicules commencent à ralentir) reste localisé aux alentours de  $x = 1000$  m. Au passage, on distingue bien (dans la partie où les véhicules roulent à 120 km/h) que chaque utilisateur laisse plus ou moins de distance avec son prédécesseur selon qu'il est agressif ou non. Enfin, il est important de noter que la formation du front de congestion n'est pas spontanée : on l'a forcé à exister ! La naissance d'embouteillages spontanés est un tout autre problème qui n'est pas traité ici.

Jouons maintenant avec les paramètres afin de déterminer les facteurs favorisant le développement de bouchons. Commençons par exemple par augmenter les distances de sécurité moyennes en les choisissant aléatoirement dans l'intervalle [15 m, 25 m]. Ce scénario survient lorsqu'il pleut ou qu'il y a du brouillard : les utilisateurs prennent leurs précautions car leur freinage n'est pas aussi efficace que par temps sec. Le résultat en simulation est immédiat (Fig. 3.10) : le front de congestion se déplace maintenant vers l'arrière et atteint l'origine (placée à la "Tour Smart", voir Fig. 3.8) après 6 bonnes minutes (la vitesse de propagation est donc de l'ordre de 9 km/h dans le sens opposé à celui du trafic).

Une troisième possibilité est de contraindre le premier véhicule à s'arrêter dans le tournant pendant une ou deux minutes. Ceci peut se produire si un accident vient de survenir à proximité de la voiture de tête. Les effets se ressentent directement en aval du trafic (Fig. 3.11) et le front de congestion décrit une courbe dans le plan : il recule jusqu'aux environs de la "Tour Smart" puis retourne vers son point d'origine. Nous reviendrons sur ce scénario à l'occasion de la deuxième partie de ce mémoire, afin de démontrer l'efficacité d'un contrôle sur les véhicules.

Enfin, nous pouvons violer les conditions de stabilité du trafic établies au chapitre précédent : en considérant des conducteurs aux vitesses désirées deux fois plus élevées que celle du premier de la file, et en prenant un temps de réaction relativement élevé, les instabilités naissent, en accord avec la théorie que nous avons développée à la Section 2.2.2. Ce trafic est présenté à la Fig. 3.12.

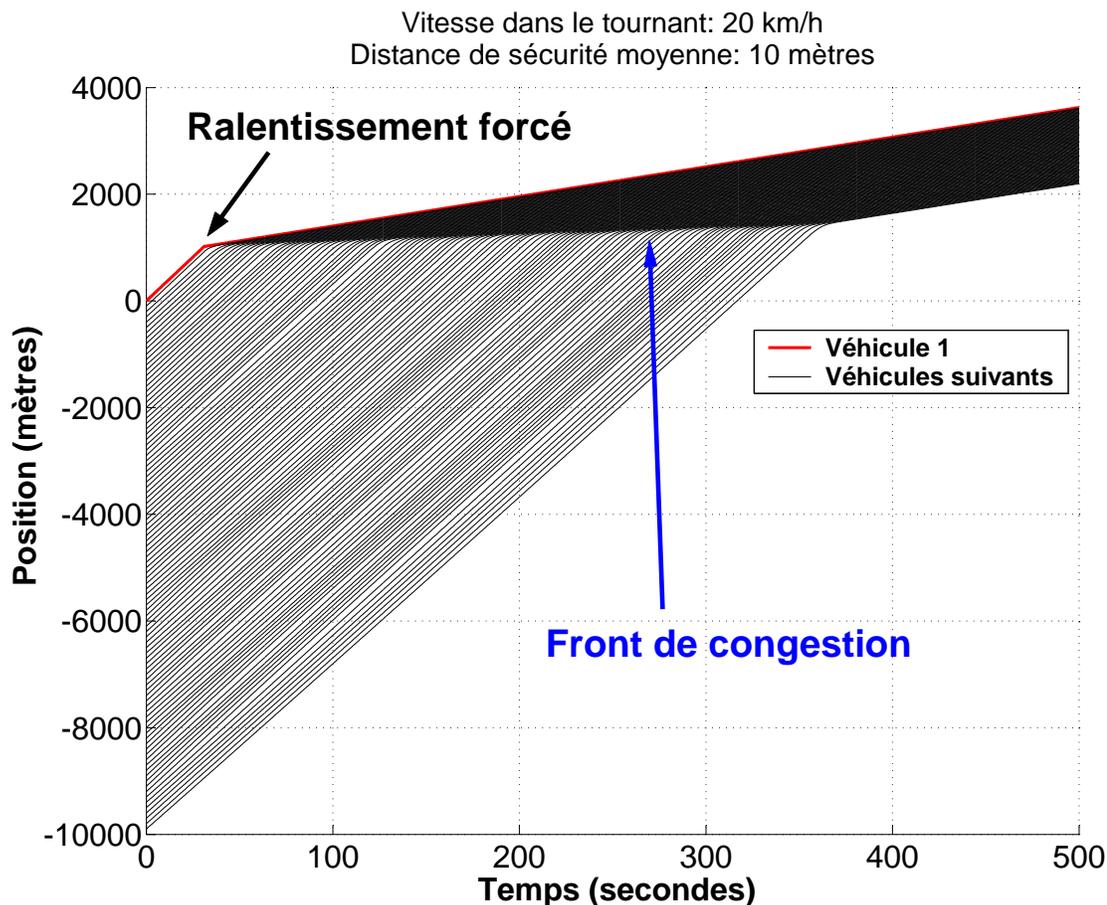


FIGURE 3.9 – Positions de 100 véhicules, dont le premier subit un ralentissement forcé de 120 km/h à 20 km/h.  $T = 0.5$  s,  $z_n = 8$  m.

### 3.4 Diagrammes empiriques $(\rho, v)$ et $(\rho, \rho v)$

A la Fig. 3.13, nous avons reporté dans les plans  $(\rho, v)$  et  $(\rho, \rho v)$  la vitesse et le débit associés à chaque véhicule à chaque instant, pour le scénario de la Fig. 3.11. La densité  $\rho$  a été calculée comme l'inverse de l'espacement avec la voiture précédente (unités : véhicules/mètre). L'allure de ces diagrammes est concordante avec leur aspect théorique (Fig. 2.2). On notera cependant qu'à la différence des modèles macroscopiques, la vitesse n'est pas en relation univoque avec la densité ; c'est le propre des modèles microscopiques qui prennent compte de paramètres autres que la densité du trafic (comme par exemple la vitesse du conducteur

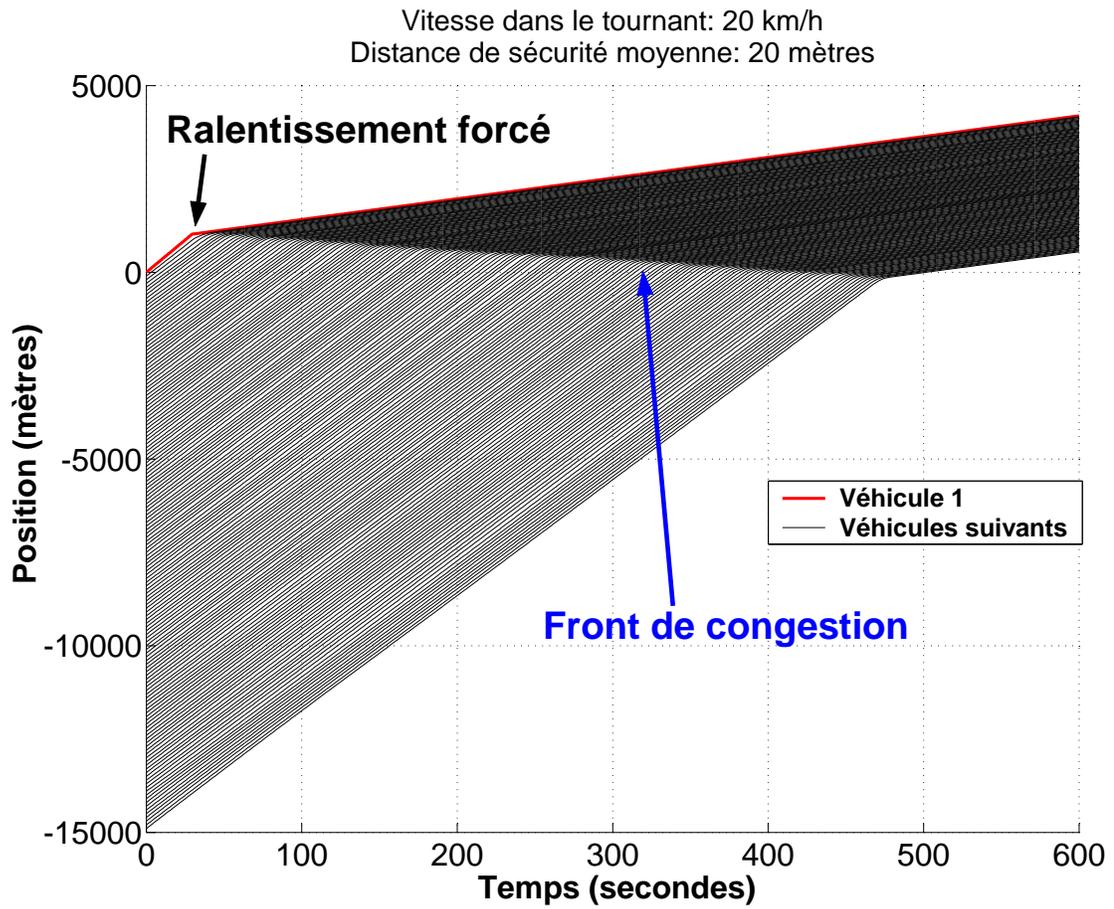


FIGURE 3.10 – Positions de 150 véhicules, dont le premier subit un ralentissement forcé de 120 km/h à 20 km/h (distances de sécurité élevées).  $T = 0.5$  s,  $z_n = 8$  m.

précédent).

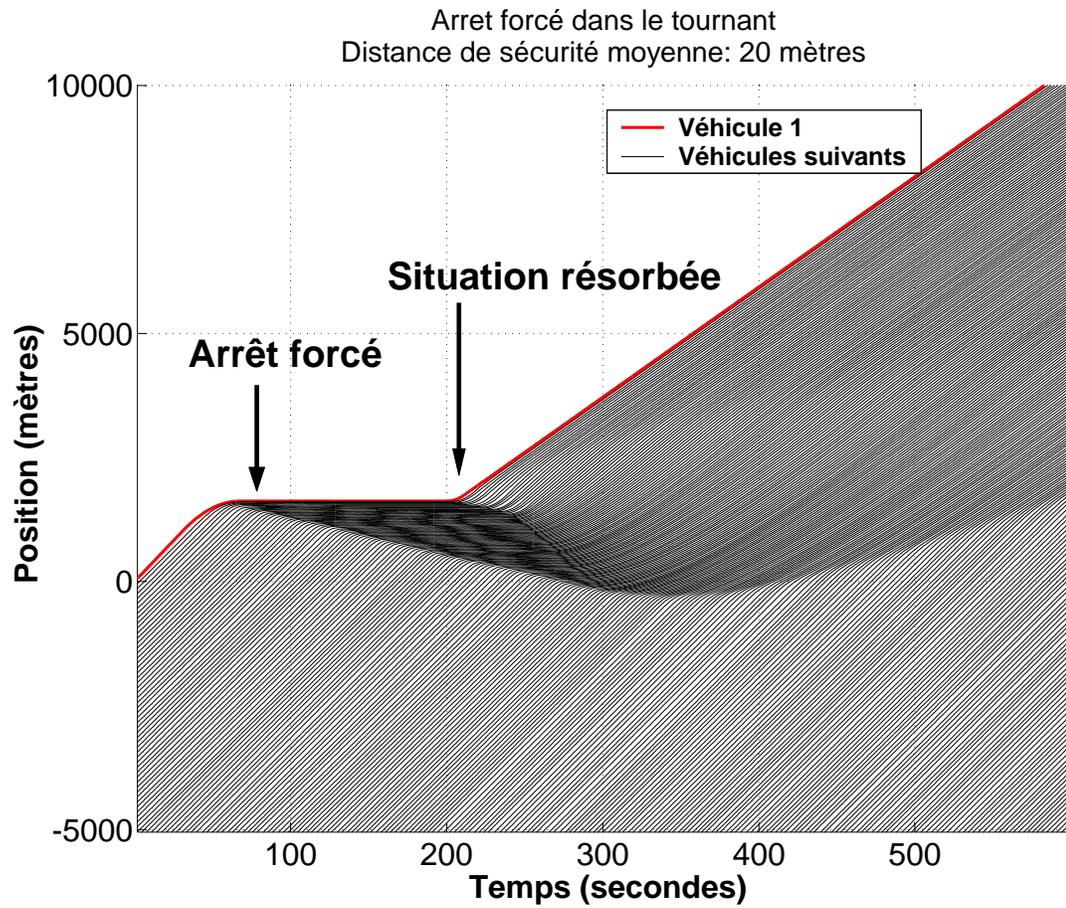


FIGURE 3.11 – Positions de 200 véhicules, dont le premier subit un arrêt forcé pendant 2 minutes.  $T = 0.5$  s,  $z_n = 8$  m.

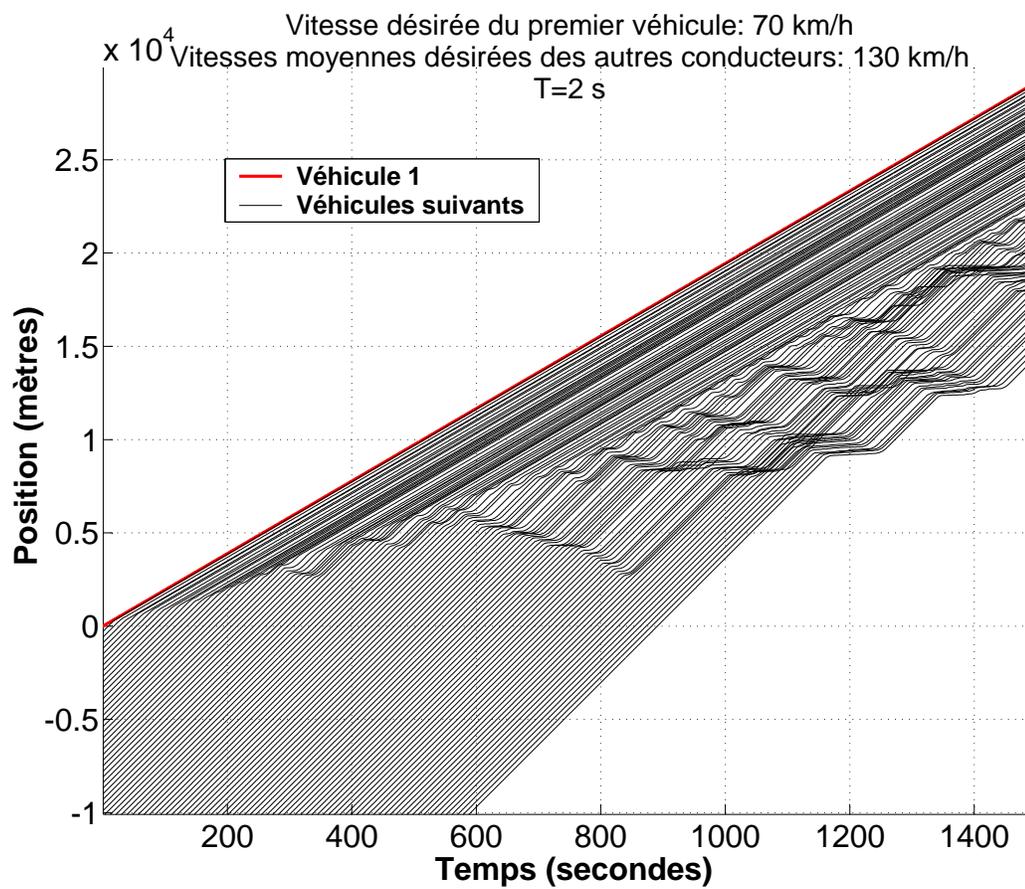


FIGURE 3.12 – Positions de 100 véhicules; le premier roule beaucoup moins vite que ce que souhaitent les 99 autres

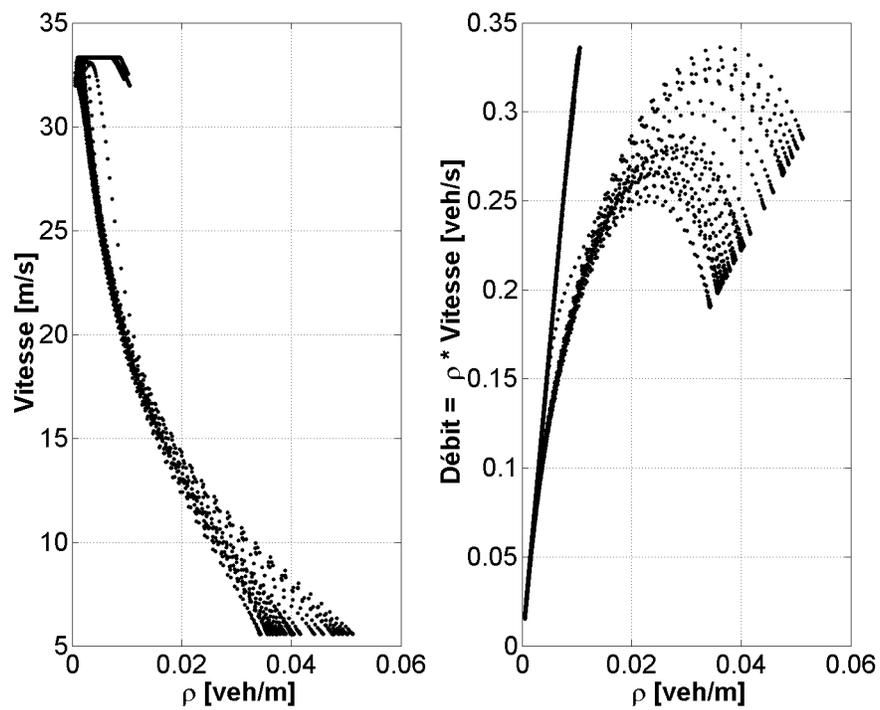


FIGURE 3.13 – Relations densité-vitesse et densité flot observées numériquement.  
 $T = 0.5$  s,  $z_n = 8$  m.

## Deuxième partie

### Gestion de conduite adaptative

# Chapitre 4

## Systemes de conduite assistée

La première partie de ce mémoire a été consacrée à l'analyse de quelques modèles microscopiques de trafic routier pour la conduite humaine ; nous avons montré de quelle manière des paramètres intrinsèques aux conducteurs (tels que la sensibilité, l'espacement préférentiel, ...) impactent l'écoulement du trafic global. La situation actuelle sur les routes n'étant pas satisfaisante, il est nécessaire d'intervenir d'une manière ou d'une autre.

Il existe fondamentalement deux moyens de contrôler un trafic : de l'extérieur (en contrôlant l'accès aux autoroutes, en imposant des limites locales de vitesse, ...) ou de l'intérieur (en donnant une loi de commande pour l'accélération du véhicule en fonction de mesures réalisées depuis ce véhicule). C'est sur ce dernier point que nous allons nous attarder dans ce chapitre.

Alors que les systèmes de *Cruise Control* classiques se bornent à maintenir une vitesse prescrite par le conducteur, une nouvelle génération d'ordinateurs embarqués est en passe d'arriver sur le marché (quelques rares voitures en sont déjà équipées) : les systèmes d'*Automatic Cruise Control* (ACC). Au moyen de radars, des mesures de distance et de vitesse sont réalisées par rapport à la voiture précédente et, en réponse à celles-ci, une certaine accélération est prescrite.

Les avantages d'une telle technologie sont d'une part un certain confort pour le conducteur et, d'autre part, une amélioration globale du trafic : en assurant des intervalles de temps très courts entre le passage de deux véhicules, on augmente forcément le débit. De plus, le temps de réaction d'un ordinateur est de l'ordre de 0.1 s, bien moins que les 0.7 s qui caractérisent les êtres humains. Bien évidemment, l'ACC suggère une représentation microscopique du trafic puisqu'il est nécessaire de différencier chaque conducteur afin de lui assigner un comportement individuel.

## 4.1 Forme générique d'un ACC

Une loi de vitesse pour un système d'ACC ne peut être choisie n'importe comment. Considérons une loi microscopique quelconque à horizon un (chaque véhicule n'interagit qu'avec son prédécesseur et son poursuivant direct) :

$$\dot{v}_n = F(\Delta x_n, v_n, \Delta v_n; \theta)$$

Pour rappel,  $\Delta x_n$  représente l'écart entre la voiture  $n$  et son prédécesseur,  $v_n$  la vitesse de la voiture  $n$  et

$$\Delta v_n \triangleq v_n - v_{n-1} \quad (4.1)$$

la différence de vitesse avec le véhicule précédent. La fonction  $F$  contient également des paramètres inhérents au véhicule et/ou au conducteur (représentés par  $\theta$ ) incluant, par exemple, une vitesse préférentielle, une distance de sécurité préférentielle, une accélération maximale possible, ...

On attend de  $F$  qu'elle reflète quelques idées naturelles que nous nous faisons au sujet d'un trafic sous contrôle :

1. L'influence de la voiture précédente doit devenir négligeable au fur et à mesure que l'écart avec celle-ci grandit. Dans le cas où cet écart est très grand, l'accélération fournie doit donc être une fonction  $\phi(v_n)$  de la vitesse courante seulement. Cette accélération se doit d'être maximale quand le véhicule courant est à l'arrêt, nulle quand il roule à sa vitesse préférentielle, et négative s'il roule plus vite que sa vitesse préférentielle. La solution la plus simple est de prendre un profil de  $\phi$  décroissant en  $v_n$ . En résumé,

$$\lim_{\Delta x_n \rightarrow +\infty} F(\Delta x_n, v_n, \Delta v_n) = \phi(v_n)$$

avec  $\phi(0) = a_{max} > 0$ ,  $\phi(v_{0n}) = 0$  et

$$\frac{d\phi}{dv_n} < 0$$

2. Au contraire, l'interaction avec la voiture précédente doit dominer la dynamique de la voiture courante lorsque l'écart est faible; autrement dit,

$$\lim_{\Delta x_n \rightarrow 0^+} F(\Delta x_n, v_n, \Delta v_n) = -\infty$$

ce qui garantit un freinage suffisant (et donc une non-collision) lorsque le véhicule courant s'approche de trop près du véhicule précédent.

3. Entre les cas extrêmes (1. et 2.), l'accélération fournie doit augmenter au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la voiture précédente, i.e.

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta x_n} > 0$$

4. Pour  $\Delta x_n$  fixé, l'accélération fournie doit diminuer lorsque la différence de vitesse  $\Delta v_n$  augmente, c'est-à-dire

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta v_n} < 0$$

Pour s'en convaincre, considérons les deux situations **(A)** et **(B)** suivantes, pour lesquelles l'espacement entre les véhicules  $n$  et  $n - 1$  est de 40 mètres.

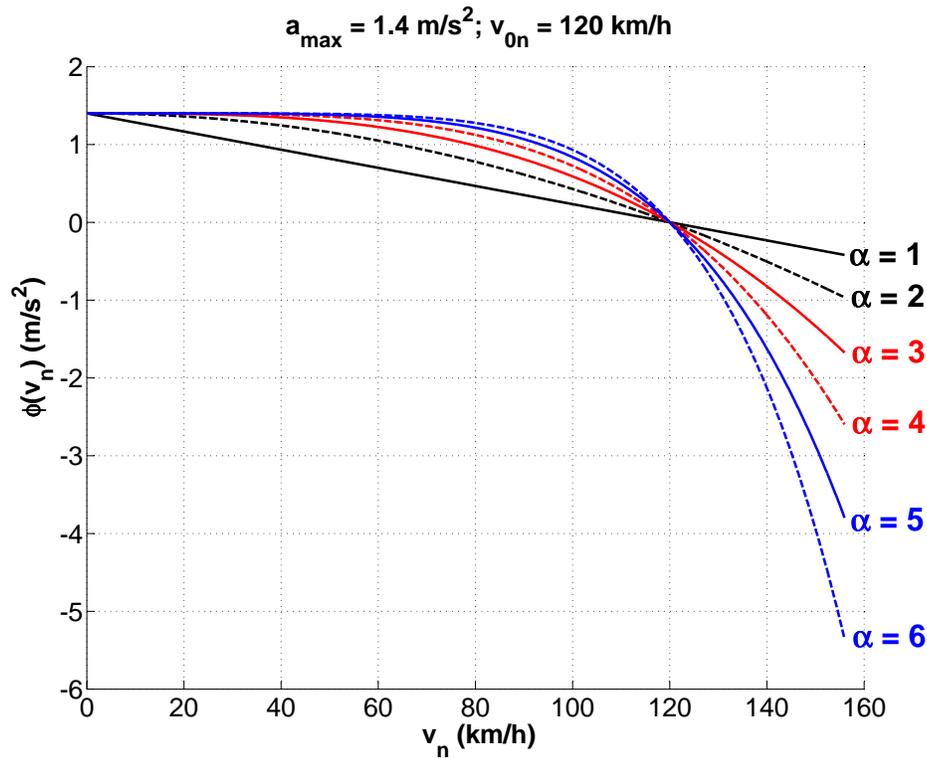
- **(A)** Le véhicule  $n$  roule à 80 km/h tandis que  $n - 1$  roule à 20 km/h. On a donc  $\Delta v_n = 60$  km/h ; le freinage s'impose et  $F$  doit être négative.
  - **(B)** Le véhicule  $n$  roule à 10 km/h tandis que  $n - 1$  roule à 20 km/h. On a donc  $\Delta v_n = -10$  km/h ; le véhicule  $n$  accélère et  $F$  est positive.
5. Il faut que  $F$  soit cohérente au niveau de ses dimensions physiques, i.e. que  $F$  soit bien exprimée en  $\text{m/s}^2$ , et ce afin de ne pas voir surgir des ordres de grandeur démesurés les uns par rapport aux autres.
6. Enfin,  $F$  doit être telle qu'un équilibre existe et que cet équilibre soit le plus stable possible.

Le choix le plus simple pour  $\phi(v_n)$  est une fonction polynomiale répondant aux exigences, i.e.

$$\phi(v_n) = a_{max} \left( 1 - \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^\alpha \right)$$

Plus l'exposant  $\alpha$  est élevé, plus le véhicule est "rappelé" avec vigueur vers sa vitesse préférentielle lorsqu'il s'en écarte (Fig. 4.1). On pourrait être tenté de prendre  $\alpha$  élevé, mais imaginons l'accélération (en fait, la décélération) subie par un utilisateur roulant à 160 km/h (disons, sur une autoroute allemande...) qui souhaite tout à coup rouler à  $v_{0n} = 120$  km/h. Il subirait alors une décélération de  $-6 \text{ m/s}^2$ , ce qui n'est pas agréable.

D'après ce qui a été expliqué à la condition 2. ci-dessus, la partie de  $F$  qui contient  $\Delta x_n$  doit dominer  $\phi$  quand  $\Delta x_n$  tend vers zéro. Le choix le plus simple répondant aux critères énoncés est d'y inclure un terme de la forme  $-(1/\Delta x_n)^\beta$  avec  $\beta \geq 1$ . Cependant, pour une question de dimensions (point 5.), il s'agit

FIGURE 4.1 – Différents choix polynomiaux pour la fonction  $\phi(v_n)$ 

de remplacer le "1" par un numérateur ayant les dimensions physiques d'une distance ; une fonction  $F$  relativement simple a ainsi la forme suivante :

$$F(\Delta x_n, v_n, \Delta v_n) = \phi(v_n) - \left( \frac{h(v_n, \Delta v_n)}{\Delta x_n} \right)^\beta$$

où  $h$  (une longueur) est une fonction croissante de  $\Delta v_n$ , de sorte que  $F$  soit décroissante en  $\Delta v_n$ .

## 4.2 Modèle de Kesting et al.

Nous présentons dans cette section un modèle récent [13] d'ACC, établi par Kesting et al. Par simplicité, nous l'appellerons désormais "ACC". L'article en question est mentionné à de multiples reprises par d'autres auteurs et un simulateur a même été implémenté<sup>1</sup>. A l'occasion de la Section 4.2.4, nous émettons

1. Site très ludique et agréable, <http://www.traffic-simulation.de>

quelques critiques à l'égard de cette loi de commande et proposons une formulation plus complète.

### 4.2.1 Algorithme de commande

Considérons une situation comparable aux expérimentations menées à l'occasion de la première partie de ce mémoire ; soit une route à une bande sur laquelle circulent  $N$  véhicules numérotés  $1, \dots, N$  en partant du premier. Kesting et al. proposent la *loi de commande* suivante :

$$\dot{v}_n = a \left( 1 - \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^\alpha - \left( \frac{h(v_n, \Delta v_n)}{\Delta x_n} \right)^\beta \right) \quad (4.2)$$

où  $a$  représente l'accélération maximale réalisable,  $v_{0n}$  est la vitesse souhaitée de l'utilisateur  $n$  sur une route dégagée,  $\Delta v_n$  est défini comme en (4.1),  $\alpha=4$ ,  $\beta=2$  et

$$h(v_n, \Delta v_n) \triangleq s_0 + v_n T + \frac{v_n \Delta v_n}{2\sqrt{ab}}$$

est la distance de sécurité souhaitée par le véhicule  $n$ . Cette dernière quantité est composée de trois termes :

1.  $s_0$ , la distance minimale possible entre deux véhicules (atteinte lorsque les véhicules tous les véhicules sont à l'arrêt). Les auteurs prennent  $s_0 = 2$  m.
2.  $v_n T$ , où  $T$  représente l'espacement temporel souhaité entre deux voitures. Par exemple, si un utilisateur veut que 1,5 s s'écoulent entre le passage sous un pont du véhicule devant lui et le passage de son propre véhicule sous ce pont, il spécifiera  $T = 1,5$  s ( $v_n T$  représente donc la distance correspondant à ce choix).
3.  $v_n \Delta v_n / 2\sqrt{ab}$ , qui est nul pour les situations stationnaires (puisque alors  $\Delta v_n$  est nul). Ce terme est d'autant plus important que les écarts de vitesse sont grands et domine donc les autres termes à l'approche où à la sortie d'un front de congestion. Ici,  $b$  représente une décélération plausible, typiquement  $2$  m/s<sup>2</sup>.

Remarquons que la loi de commande (4.2) est conforme aux exigences 1-5. émises à la Section 4.1. La question théorique de la stabilité du système d'ACC n'a pas été discutée par les auteurs ; nécessitant des outils plus sophistiqués, elle traitée au Chapitre 5.

### 4.2.2 Evaluation de l'état du trafic

Toute la finesse du raisonnement tenu par Kesting et al. réside dans le fait que les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $T$  du modèle (4.2) sont modulés en fonction du *type de trafic* dans lequel le véhicule est immergé. Cinq situations sont envisageables :

- Le véhicule se meut dans un trafic fluide (*Free*)
- Le véhicule est à l'approche d'un front de congestion (*Up*)
- Le véhicule est au sein d'un embouteillage (*Jam*)
- Le véhicule quitte un embouteillage (*Down*)
- Le véhicule se meut au voisinage d'un "goulot"<sup>2</sup> (*Bottleneck*).

La Fig. 4.2 présente sous forme de diagramme le fonctionnement de l'algorithme utilisé par l'ordinateur de bord. Trois échelles de temps (les étages horizontaux) sont à distinguer, correspondant à trois modes opératoires. Le premier, de l'ordre de la seconde, fournit l'accélération adéquate en réponse aux données de vitesse, d'espacement et de différence de vitesse observées au moyen de radars. Le second, de l'ordre de la minute, calibre les paramètres du modèle en fonction du type de trafic détecté (les cinq situations décrites ci-dessus). Enfin, deux paramètres ( $v_0$  et  $T$ , respectivement la vitesse désirée et l'intervalle de temps désiré) sont spécifiés par le conducteur et sont donc rarement modifiés (lors du passage d'une autoroute à une route secondaire, par exemple).

Il reste à déterminer la manière dont l'ordinateur de bord évalue l'état du trafic. C'est très simple : cet ordinateur compare à tout moment la vitesse actuelle du véhicule à l'historique moyenné de la vitesse. A cette fin, on définit la *moyenne mobile exponentielle* de  $v_n(t)$  comme

$$\bar{v}_n(t) \triangleq \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} v_n(t') dt'$$

avec  $\tau$  un temps de relaxation<sup>3</sup>.

L'exemple repris à la Fig. 4.3 permet d'y voir plus clair. Une voiture, roulant à 120 km/h depuis un certain temps, est contrainte à diminuer sa vitesse à l'approche d'un trafic plus dense où la vitesse tombe à 20 km/h. On suppose

---

2. Un goulot est défini comme tout ralentissement causé par un phénomène extérieur : travaux, accidents, rétrécissements, rampe d'accès, ...

3. Au delà de trois fois temps de relaxation, l'exponentielle ne vaut plus que 0.05 ;  $\tau$  détermine donc un horizon temporel sur lequel les mesures sont jugées contributives à la moyenne. Ici, on prend  $\tau = 5$  s, i.e. les cinq dernières secondes sont prises en compte dans le calcul de la moyenne et le reste est considéré comme négligeable.

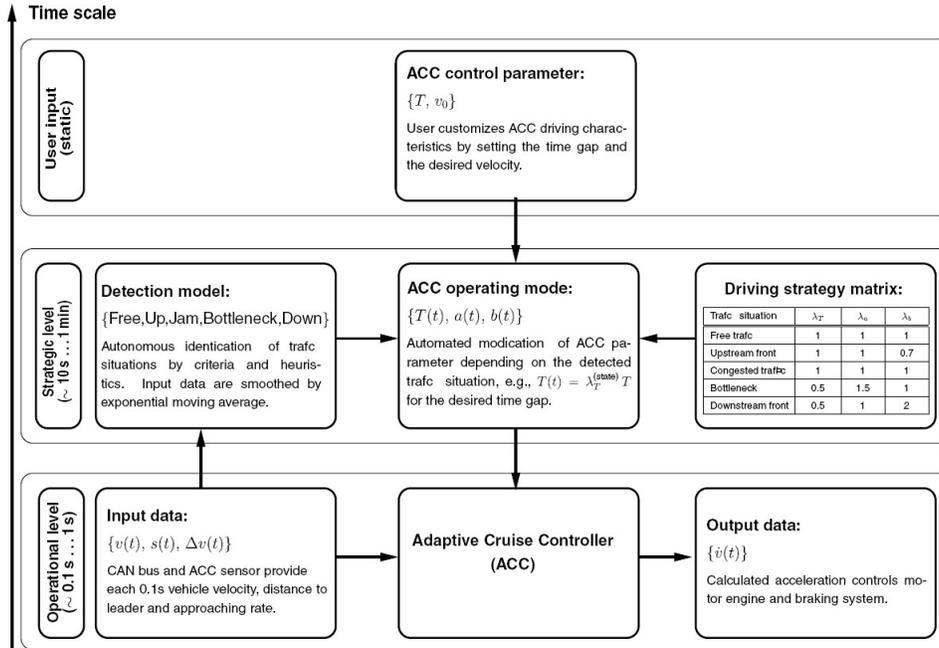


FIGURE 4.2 – *Automatic Cruise Control* de Kesting et al. : principe de fonctionnement. Source : [13]

en outre que la mesure de sa vitesse  $v_n(t)$  est entachée de bruit. L'ordinateur de bord calcule, sur base de ces mesures enregistrées et à tout instant, la moyenne mobile exponentielle de la vitesse ; cette moyenne est "lisse". Il applique ensuite la procédure reprise au diagramme de la Fig. 4.4 afin de déterminer l'état du trafic<sup>4</sup>. Dans l'exemple qui nous occupe (Fig. 4.3) et en accord avec le diagramme décrit à la Fig. 4.4, le trafic est donc fluide jusque  $t = 8$  s (puisque  $\bar{v}_n > 60$  km/h) ; on approche un embouteillage jusque  $t = 19$  s (puisque  $v_n - \bar{v}_n < -10$  km/h) ; on est dans les bouchons à partir de  $t = 19$  s (puisque  $\bar{v}_n < 40$  km/h).

### 4.2.3 Représentation sous forme de système dynamique

L'analyse de stabilité que nous mènerons à l'occasion du Chapitre 5 requiert de traduire l'ACC présenté ci-dessus sous la forme d'un système dynamique en temps continu. L'écart entre les véhicules  $n$  et  $n - 1$  suivant la dynamique

$$\Delta \dot{x}_n = \frac{d}{dt}(x_{n-1} - x_n) = v_{n-1} - v_n,$$

4. seule la détection d'un goulot suppose la connaissance préalable de la route *via* un système GPS

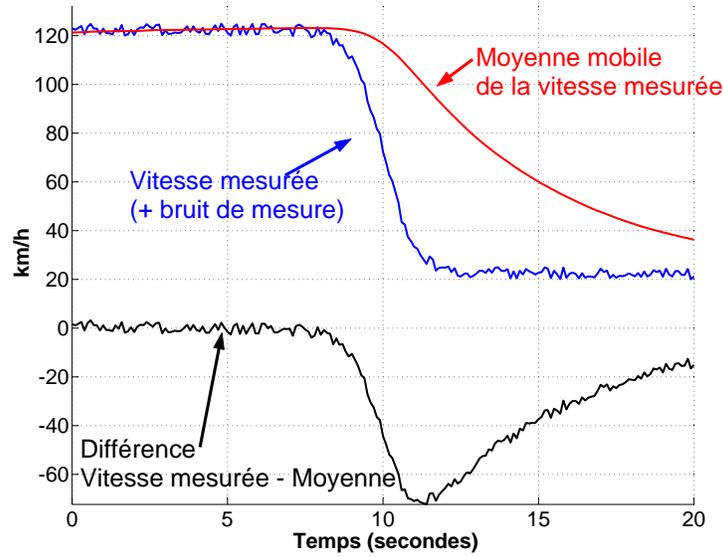


FIGURE 4.3 – Calcul de la moyenne mobile exponentielle de la vitesse à partir de mesures bruitées de la vitesse.

un trafic de  $N$  véhicules en file est caractérisé par un vecteur de  $2N - 1$  variables d'état :

$$\mathbf{x} \triangleq [v_1 \quad \Delta x_2 \quad v_2 \quad \dots \quad \Delta x_N \quad v_N]^T$$

(la composante  $\Delta x_1$  n'a pas de sens puisque la première voiture n'a personne devant elle). On aboutit donc au système dynamique en temps continu

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= a \left( 1 - \left( \frac{v_1}{v_{01}} \right)^\alpha \right) \\ \Delta \dot{x}_n &= v_{n-1} - v_n & (n = 2, \dots, N) \\ \dot{v}_n &= a \left( 1 - \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^\alpha - \left( \frac{s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{n-1})}{2\sqrt{ab}}}{\Delta x_n} \right)^\beta \right) & (n = 2, \dots, N) \end{cases} \quad (4.3)$$

ou, sous forme plus compacte ,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

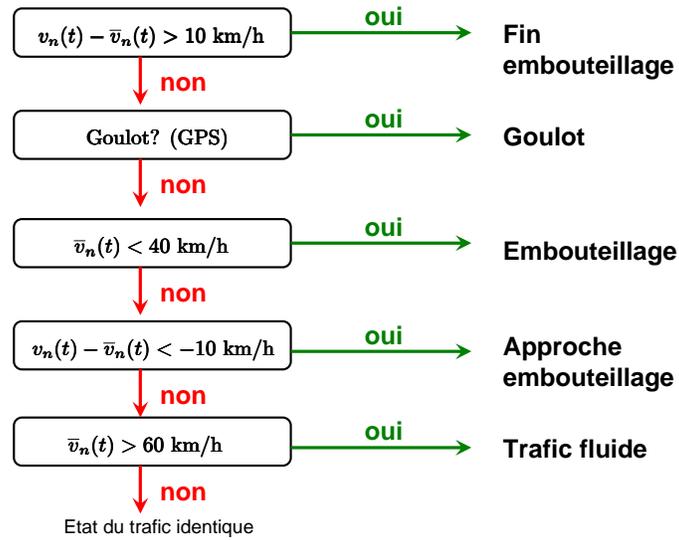


FIGURE 4.4 – Evaluation de l'état du trafic par moyenne mobile exponentielle de la vitesse.

## 4.2.4 Commentaires, critiques et améliorations de l'ACC

### Distances à l'équilibre

D'après (4.3), un équilibre  $\mathbf{x}^*$  du système vérifie  $f(\mathbf{x}^*) = 0$ . On déduit donc

$$v_n^* = v_{01} \quad (n = 1, \dots, N)$$

et

$$\Delta x_n^* = \frac{s_0 + v_{01}T}{\left(1 - \left(\frac{v_{01}}{v_{0n}}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}}} \quad (n = 2, \dots, N)$$

Remarquons qu'il faut impérativement avoir  $v_{0n} > v_{01}$  pour que  $\Delta x_n^*$  soit une quantité bien définie et positive, et ce quels que soient les exposants  $\alpha$  et  $\beta$ . Kesting et al. ont pris  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 2$ ; lorsque  $v_{01} = 120$  km/h et  $v_{0n} = 125$  km/h, cette distance vaut alors 133 m, ce qui est élevé malgré que les deux voitures aient des vitesses préférentielles proches. Une manière de réduire cet écart est d'augmenter les exposants  $\alpha$  et  $\beta$ ; en prenant  $\alpha = 5$  et  $\beta = 3$ , on ramène cette distance à 91 m et on augmente par ailleurs le débit autoroutier. Il ne faut pas non plus prendre les exposants trop élevés pour éviter des décélérations trop violentes (voir Section 4.1).

### Vitesses préférentielles identiques

Une situation gênante survient également dans le cas -probable- où l'utilisateur  $n$  souhaite rouler à la même vitesse que le premier de la file; on a alors  $v_{0n} = v_{01}$  et l'espacement à l'équilibre est théoriquement infini (l'utilisateur  $n$  ne pourra jamais rouler exactement à la vitesse  $v_{0n}$ ). Une solution pour éviter cela est d'automatiquement négliger le terme d'interaction dès que l'espacement devient supérieur à un certain seuil, par exemple 300 m.

### Divergence des solutions

Supposons que le véhicule  $n - 1$  est à l'équilibre et roule donc à vitesse  $v_{01}$ . La dynamique du véhicule  $n$  se résume donc à un système d'ordre deux,

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_n &= v_{01} - v_n \\ \dot{v}_n &= a \left( 1 - \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^\alpha - \left( \frac{s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{01})}{2\sqrt{ab}}}{\Delta x_n} \right)^\beta \right) \end{cases} \quad (4.4)$$

Le plan de phase de (4.4) est esquissé à la Fig. 4.5, soulignant l'anomalie suivante : deux trajectoires aux conditions initiales proches peuvent diverger. Cela n'est pas désirable : autant la trajectoire en tireté est acceptable, autant celle en trait plein est absurde : le véhicule ralentit et mène une longue excursion dans le plan de phase avant d'atteindre l'équilibre.

L'isocline  $\dot{v}_n = 0$  a été tracée sur la Fig. 4.5; en bas à gauche du plan de phase, il existe une "bulle" au sein de laquelle  $\dot{v}_n < 0$ . Une trajectoire dont la condition initiale s'y trouve peut (comme c'est le cas pour la solution en trait plein) s'éloigner de l'équilibre pendant un certain temps avant de rejoindre ce dernier.

Nous pouvons remédier à ce problème mais, pour cela, il faut modifier l'isocline  $\dot{v}_n = 0$ . Dans le modèle original, celle-ci est définie par l'équation

$$1 - \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^\alpha = \left( \frac{h(v_n)}{\Delta x_n} \right)^\beta \quad (4.5)$$

où on a posé par simplicité

$$h(v_n) \triangleq s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{01})}{2\sqrt{ab}}$$

Nous travaillons bien sûr toujours sous l'hypothèse  $v_{0n} > v_{01}$  pour garantir l'existence de l'équilibre. Considérons deux cas :

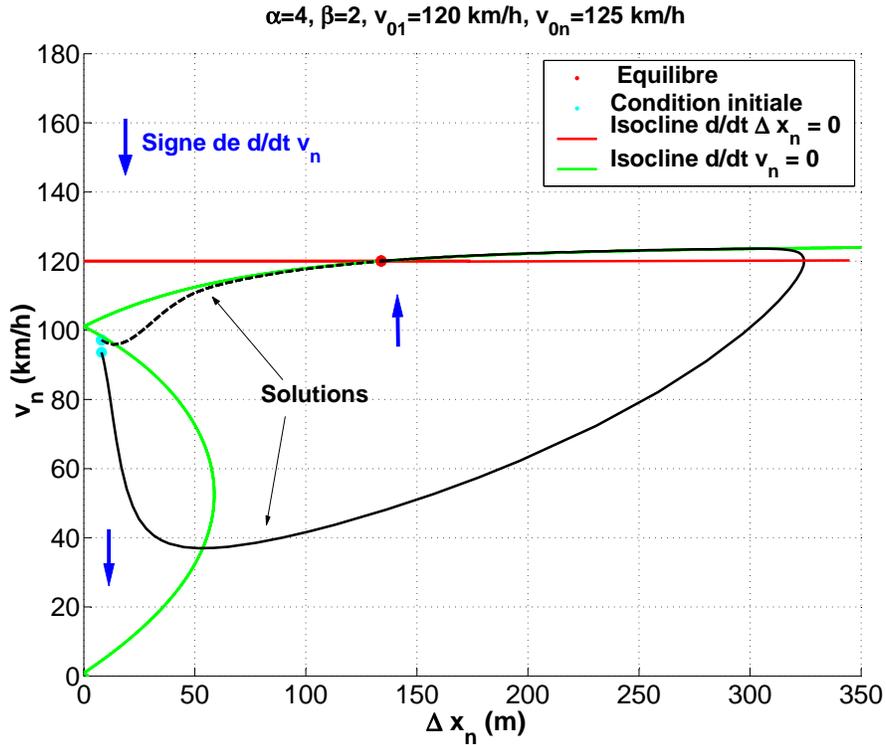


FIGURE 4.5 – Divergence ( $\beta = 2$ ), dans le plan de phase, de deux solutions issues de conditions initiales proches (le véhicule précédent roule à vitesse constante  $v_{01}$  constante)

- **Cas 1** :  $v_n > v_{0n}$ . Dans ce cas, le membre de gauche de (4.5) est strictement négatif. Or,  $h(v_n)$  est strictement positif (puisque  $v_n > v_{0n} > v_{01} > 0$ ) et  $\Delta x_n$  est bien entendu positif également, ce qui rend le membre de droite strictement positif. L'égalité ne peut être vérifiée; en d'autres mots, il est impossible d'avoir  $\dot{v}_n = 0$  quand  $v_n > v_{0n}$ , et ce quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$ . Graphiquement, l'isocline  $\dot{v}_n = 0$  possède une asymptote horizontale d'équation  $v_n = v_{0n} = 125 \text{ km/h}$  sur la Fig. 4.5.
- **Cas 2** :  $v_n \leq v_{0n}$ . On distingue alors deux possibilités :
  - soit  $\beta$  est *pair* (comme c'est le cas dans la version originale de l'ACC); on trouve

$$\Delta x_n = \frac{|h(v_n)|}{\left(1 - \left(\frac{v_n}{v_{0n}}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

La valeur absolue confère l'allure "rebondie" de la courbe verte de la Fig. 4.5 et est responsable du signe de  $\dot{v}_n$  à l'intérieur de cette région.

– soit  $\beta$  est *impair* ; on trouve

$$\Delta x_n = \frac{h(v_n)}{\left(1 - \left(\frac{v_n}{v_{0n}}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Les solutions de cet équation dans le premier quadrant (pour  $\Delta x_n, v_n \geq 0$ ) n'existent donc que lorsque  $h(v_n)$  est positif.

En prenant  $\beta$  impair, par exemple  $\beta = 3$ , on assure donc une meilleure continuité dans le plan de phase ; les deux trajectoires issues des conditions initiales de la Fig. 4.6 restent proches.

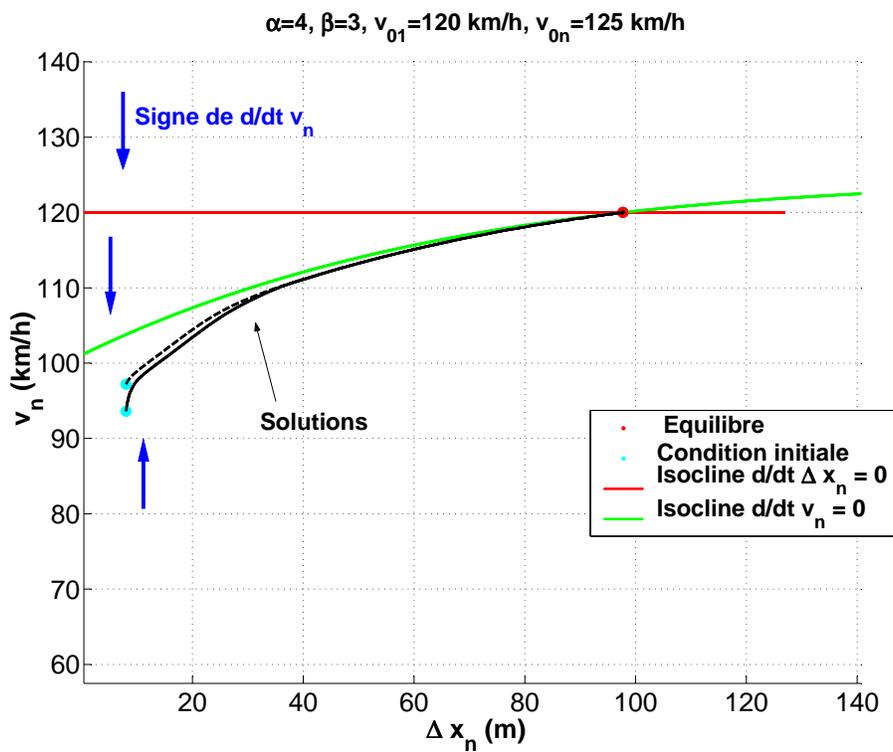


FIGURE 4.6 – Choix  $\beta = 3$  : proximité des solutions.

## Sécurité

Il est capital de s'assurer que l'espacement  $\Delta x_n(t)$  reste strictement positif pour tout  $t$  (si  $\Delta x_n \leq 0$ , les conducteurs  $n$  et  $n - 1$  peuvent sortir leurs constats d'accident puisqu'une collision vient d'avoir lieu!). Pour peu qu'on n'ait aucune borne sur les accélérations admissibles, le système d'ACC présenté est *collision-free* (sans collision), de par la présence du terme en  $1/\Delta x_n$  qui garantit que les trajectoires dans le plan de phase telles que  $\Delta x_n(0) > 0$  restent dans la partie droite de ce plan de phase.

## Vitesses négatives

L'analyse détaillée du plan de phase n'exclut pas (Fig. 4.7) que, théoriquement, certaines vitesses fournies par l'ACC deviennent négatives<sup>5</sup>. L'ordinateur de bord n'ayant pas de contrôle sur la marche arrière du véhicule, la vitesse la plus faible qui puisse être atteinte par ce dernier est  $v_n = 0$ ; les trajectoires qui, dans le plan de phase, rencontreraient éventuellement l'axe  $v_n = 0$  dans la Zone A (Fig.(4.7)), longeraient alors (sous l'influence du champ de vecteurs) cet axe et se retrouveraient en Zone B, rejoignant alors éventuellement l'équilibre. Il n'y a donc pas de problème : toute trajectoire démarrant avec  $\Delta x_n > 0$  et  $v_n \geq 0$  reste dans cet ensemble.

## Nouvel algorithme

Forts de ces remarques, nous proposons la version modifiée de l'algorithme ACC :

$$\dot{v}_n = a \left( 1 - \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^\alpha - \left( \frac{s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{n-1})}{2\sqrt{ab}}}{\Delta x_n} \right)^\beta \right) \quad (4.6)$$

avec  $\alpha = 5$  et  $\beta = 3$ .

---

<sup>5</sup> cela n'a toutefois jamais été observé en simulation, même pour des conditions initiales critiques.

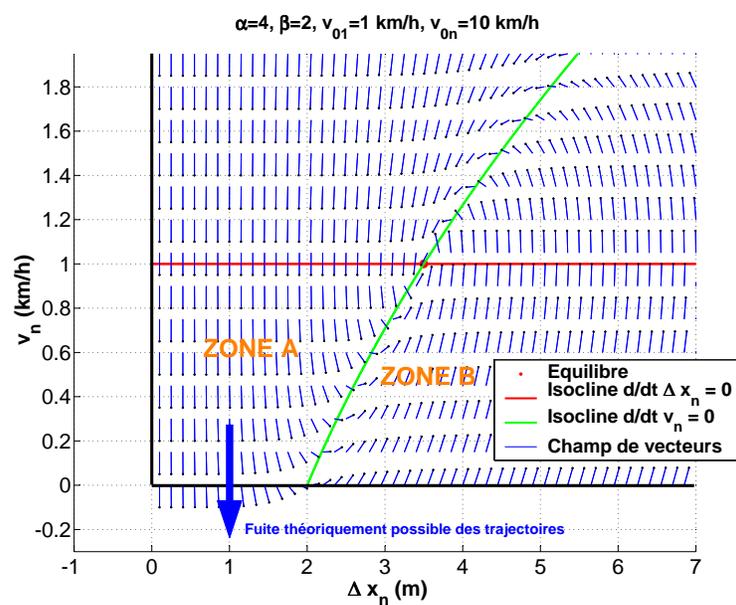


FIGURE 4.7 – Dans le modèle original d'ACC, les trajectoires pourraient traverser l'axe  $v_n = 0$ .

# Chapitre 5

## Stabilité du trafic sous contrôle

La qualité d'un système de conduite assistée (ACC) dépend de plusieurs facteurs : coût économique du dispositif, sécurité, accélérations et décélérations souples, ... Il existe cependant une question cruciale qui n'a pas été discutée de façon théorique par les auteurs : celle de la stabilité. En d'autres mots, on attend d'un système de contrôle *local* (puisqu'interne à chaque véhicule) qu'il maintienne le bon état *global* du trafic.

Ce chapitre est consacré à l'étude de stabilité du système d'ACC (4.6) développé et amélioré au chapitre précédent. Deux résultats complémentaires sont établis : premièrement, nous montrons que tout équilibre du système d'ACC pris dans sa globalité (i.e. en considérant les  $N$  voitures de la file) est nécessairement linéairement stable. Ensuite, nous démontrons un résultat de stabilité plus fort mais plus restrictif : pour peu que la voiture précédente roule à vitesse constante, l'équilibre de la voiture courante (s'il existe) est globalement asymptotiquement stable.

### 5.1 Notions élémentaires de stabilité

Nous rappelons ci-dessous les notions de stabilité asymptotique<sup>1</sup> nous permettant de présenter les résultats des Sections 5.2 et 5.3.

Soit le système dynamique

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{5.1}$$

---

1. Définitions et Théorèmes repris du cours *MAT1223 - Equations différentielles ordinaires* (D. Bonheure), UCL, 2006

où  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelé "champ de vecteurs". Supposons que  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{D}$  soit un équilibre du système, i.e.  $f(\mathbf{x}^*) = 0$ . Enfin, dénotons une condition initiale  $\mathbf{x}(0)$  par  $\mathbf{x}_0$ .

**Définition 1** *L'ensemble*

$$B_\rho(\mathbf{x}^*) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \rho\}$$

est appelé boule ouverte de rayon  $\rho$  centrée en  $\mathbf{x}^*$ .

**Définition 2** *Soit  $f : B_\rho(\mathbf{x}^*) \subset \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Le point d'équilibre  $\mathbf{x}^*$  est stable (au sens de Liapunov) si*

$$(\forall \varepsilon \in ]0, \rho[) \quad (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall \mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*)) \quad (\forall t \geq 0) : \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$$

**Définition 3** *Soit  $f : B_\rho(\mathbf{x}^*) \subset \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Le point d'équilibre  $\mathbf{x}^*$  est attractif s'il existe  $\delta \in ]0, \rho[$  tel que pour tout  $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$ , la solution de (5.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0$$

**Définition 4** *Soit  $f : B_\rho(\mathbf{x}^*) \subset \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Le point d'équilibre  $\mathbf{x}^*$  est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

## 5.2 Stabilité linéaire du système global

Le système ACC amélioré (4.6) peut être reformulé (à l'instar de (4.3)) comme un système dynamique de dimension  $2N - 1$ ,

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= a \left( 1 - \left( \frac{v_1}{v_{01}} \right)^\alpha \right) \\ \Delta \dot{x}_n &= v_{n-1} - v_n \\ \dot{v}_n &= a \left( 1 - \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^\alpha - \left( \frac{s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{n-1})}{2\sqrt{ab}}}{\Delta x_n} \right)^\beta \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} (n = 2, \dots, N) \\ (n = 2, \dots, N) \end{matrix} \quad (5.2)$$

ou, sous forme plus compacte,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

avec

$$\mathbf{x} = [v_1 \quad \Delta x_2 \quad v_2 \quad \dots \quad \Delta x_N \quad v_N]^T$$

Par souci de généralité, nous laissons les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  sous forme symbolique, en supposant qu'ils sont tous deux strictement supérieurs à 1.

Nous procédons dans cette section à l'analyse de stabilité linéaire de (5.2), basée sur le théorème suivant :

**Théorème 1** *Soit  $f : B_\rho(\mathbf{x}^*) \subset \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Le point d'équilibre  $\mathbf{x}^*$  du système linéarisé*

$$\dot{\mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

*est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $\nabla f(\mathbf{x}^*)$  sont à parties réelles strictement négatives.*

### 5.2.1 Equilibre

Un équilibre  $\mathbf{x}^*$  de (5.2) doit vérifier  $f(\mathbf{x}^*) = 0$ . La première composante de (5.2) ne s'annulant que lorsque  $v_1 = v_{01}$ , on déduit que les vitesses à l'équilibre des  $N$  véhicules sont identiques et égales à celle du véhicule de tête :

$$v_n^* = v_{01} \quad (n = 1, \dots, N) \quad (5.3)$$

Il reste que  $\dot{v}_n$  ( $2 \leq n \leq N$ ) s'annule lorsque la condition

$$\left( \frac{s_0 + v_{01}T}{\Delta x_n} \right)^\beta = 1 - \left( \frac{v_{01}}{v_{0n}} \right)^\alpha \quad (5.4)$$

est vérifiée. Remarquons, à ce stade du raisonnement, que (5.4) n'a de sens que lorsque  $v_{0n} > v_{01}$  pour tout  $n = 2, \dots, N$ . Si ce n'était pas le cas, le membre de droite de (5.4) serait négatif, alors que le membre de gauche est toujours strictement positif<sup>2</sup>. Notre intuition vient d'ailleurs conforter ce résultat : si une voiture de la file souhaite rouler moins vite que la première, l'écart ne peut que se creuser entre elles et aucun équilibre n'est réalisable.

L'état d'équilibre de (5.2) est donc unique et donné par

$$\mathbf{x}^* = \begin{cases} v_n^* & = v_{01} & (n = 1, \dots, N) \\ \Delta x_n^* & = \frac{s_0 + v_{01}T}{\left(1 - \left(\frac{v_{01}}{v_{0n}}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}}} & (n = 2, \dots, N) \end{cases} \quad (5.5)$$

sous l'hypothèse  $v_{0n} > v_{01} \quad \forall n = 2, \dots, N$ . Dans la suite, nous supposons (sauf indication contraire) que cette dernière hypothèse est d'application.

---

<sup>2</sup> A la section 4.2.4 du chapitre précédent, nous avons montré que l'écart  $\Delta x_n$  est toujours positif.

### 5.2.2 Linéarisation

Afin d'utiliser le Théorème 1, il est nécessaire de calculer la matrice jacobienne de  $f$  au point d'équilibre  $\mathbf{x}^*$ .

La première composante de  $f$  ne dépend que de  $v_1$  et on a

$$\frac{\partial \dot{v}_1}{\partial v_1} = -\frac{a\alpha}{v_{01}} \left( \frac{v_1}{v_{01}} \right)^{\alpha-1}$$

A l'équilibre,

$$\left. \frac{\partial \dot{v}_1}{\partial v_1} \right|_{eq} = -\frac{a\alpha}{v_{01}} \triangleq \Gamma_1 \quad (5.6)$$

Il vient ensuite

$$\left. \frac{\partial \Delta \dot{x}_n}{\partial v_{n-1}} \right|_{eq} = 1$$

et

$$\left. \frac{\partial \Delta \dot{x}_n}{\partial v_n} \right|_{eq} = -1$$

pour  $2 \leq n \leq N$ .

Après quelques calculs un peu plus fastidieux, on trouve successivement

$$\frac{\partial \dot{v}_n}{\partial v_{n-1}} = a\beta \left( \frac{s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{n-1})}{2\sqrt{ab}}}{\Delta x_n} \right)^{\beta-1} \frac{v_n}{2\sqrt{ab}\Delta x_n}$$

A l'équilibre, cette quantité devient

$$\left. \frac{\partial \dot{v}_n}{\partial v_{n-1}} \right|_{eq} = \frac{a\beta v_{01}}{2\sqrt{ab}(s_0 + v_{01}T)} \left( 1 - \left( \frac{v_{01}}{v_{0n}} \right)^\alpha \right) \triangleq \Upsilon_n$$

D'autre part,

$$\frac{\partial \dot{v}_n}{\partial \Delta x_n} = a\beta \left( \frac{s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{n-1})}{2\sqrt{ab}}}{\Delta x_n} \right)^\beta \frac{1}{\Delta x_n}$$

qui vaut, à l'équilibre,

$$\left. \frac{\partial \dot{v}_n}{\partial \Delta x_n} \right|_{eq} = \frac{a\beta \left( 1 - \left( \frac{v_{01}}{v_{0n}} \right)^\alpha \right)^{1+\frac{1}{\beta}}}{s_0 + v_{01}T} \triangleq \Lambda_n \quad (5.7)$$

Enfin,

$$\frac{\partial \dot{v}_n}{\partial v_n} = -a \left( \frac{\alpha}{v_{0n}} \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^{\alpha-1} + \beta \left( \frac{s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{n-1})}{2\sqrt{ab}}}{\Delta x_n} \right)^{\beta-1} \left( \frac{T + \frac{v_n + (v_n - v_{n-1})}{2\sqrt{ab}}}{\Delta x_n} \right) \right)$$

A l'équilibre, on a

$$\left. \frac{\partial \dot{v}_n}{\partial v_n} \right|_{eq} = -a \left( \frac{\alpha}{v_{0n}} \left( \frac{v_{01}}{v_{0n}} \right)^{\alpha-1} + \beta \left( 1 - \left( \frac{v_{01}}{v_{0n}} \right)^\alpha \right) \left( \frac{T + \frac{v_{01}}{2\sqrt{ab}}}{s_0 + v_{01}T} \right) \right) \triangleq \Gamma_n \quad (5.8)$$

### 5.2.3 Matrice jacobienne et valeurs propres

En utilisant les résultats ci-dessus, la matrice jacobienne<sup>3</sup> du système (5.2) vaut, à l'équilibre (et compte tenu des notations définies à la section précédente),

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Upsilon_2 & \Lambda_2 & \Gamma_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Upsilon_3 & \Lambda_3 & \Gamma_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{N-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Upsilon_N & \Lambda_N & \Gamma_N \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Les valeurs propres  $\lambda \in \mathbb{C}$  de cette matrice sont solution de l'équation caractéristique

$$\det(\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda I_{2N-1}) = 0 \quad (5.10)$$

où  $I_{2N-1}$  est la matrice identité de genre  $(2N-1, 2N-1)$ .

Nous calculons directement

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda I_{2N-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Upsilon_2 & \Lambda_2 & \Gamma_2 - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Upsilon_3 & \Lambda_3 & \Gamma_3 - \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{N-1} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Upsilon_N & \Lambda_N & \Gamma_N - \lambda \end{pmatrix}$$

3. Pour rappel, la matrice jacobienne du système  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  est notée  $\nabla f(\mathbf{x})$  et est telle que l'élément  $(i, j)$  de cette matrice est la dérivée de la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $f$  par rapport à la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{x}$

La matrice ci-dessus n'est malheureusement ni diagonale, ni bloc-diagonale, ni triangulaire, mais elle présente clairement une structure répétitive. Posons dès lors

$$d_n \triangleq \det \begin{pmatrix} \Gamma_n - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Upsilon_{n+1} & \Lambda_{n+1} & \Gamma_{n+1} - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Upsilon_{n+2} & \Lambda_{n+2} & \Gamma_{n+2} - \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{N-1} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Upsilon_N & \Lambda_N & \Gamma_N - \lambda \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

(pour  $n = 1, \dots, N$ ) et

$$e_n \triangleq \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_n & \Gamma_n - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Upsilon_{n+1} & \Lambda_{n+1} & \Gamma_{n+1} - \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{N-1} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Upsilon_N & \Lambda_N & \Gamma_N - \lambda \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

(pour  $n = 2, \dots, N$ ). Nous allons dériver une relation récursive entre les  $d_n$  et les  $e_n$  afin de pouvoir calculer le déterminant dans (5.10).

En effectuant l'expansion de Laplace le long de la première ligne de la matrice de (5.11), nous obtenons

$$d_n = (\Gamma_n - \lambda)e_{n+1} \quad (n = 1, \dots, N) \quad (5.13)$$

D'autre part, en développant le déterminant de (5.12) le long de la première ligne,

on a

$$\begin{aligned}
 e_n &= -\lambda d_n - (-1) \times \det \begin{pmatrix} \Lambda_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{n+1} & \Gamma_{n+1} - \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{N-1} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Upsilon_N & \Lambda_N & \Gamma_N - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= -\lambda d_n + \Lambda_n e_{n+1}
 \end{aligned}$$

Utilisons alors l'expression (5.13) pour  $d_n$ ; il vient par conséquent

$$\begin{aligned}
 e_n &= -\lambda(\Gamma_n - \lambda)e_{n+1} + \Lambda_n e_{n+1} \\
 &= (-\lambda(\Gamma_n - \lambda) + \Lambda_n)e_{n+1} \quad (n = 2, \dots, N)
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Le cas  $n = N$  donne

$$\begin{aligned}
 e_N &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ \Lambda_N & \Gamma_N - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= -\lambda(\Gamma_N - \lambda) + \Lambda_N
 \end{aligned}$$

On tire profit de ce cas de base pour calculer (d'après la relation de récurrence (5.14) trouvée pour  $e_n$ )

$$\begin{aligned}
 e_{N-1} &= (-\lambda(\Gamma_{N-1} - \lambda) + \Lambda_{N-1})e_N \\
 &= (-\lambda(\Gamma_{N-1} - \lambda) + \Lambda_{N-1})(-\lambda(\Gamma_N - \lambda) + \Lambda_N)
 \end{aligned}$$

En poursuivant ce raisonnement, on déduit

$$e_n = \prod_{i=n}^N (-\lambda(\Gamma_i - \lambda) + \Lambda_i) \quad (n = 2, \dots, N)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 \det(\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda I_{2N-1}) &= d_1 \\
 &= (\Gamma_1 - \lambda)e_2 \quad (\text{en vertu de (5.13)}) \\
 &= (\Gamma_1 - \lambda) \prod_{i=2}^N (-\lambda(\Gamma_i - \lambda) + \Lambda_i)
 \end{aligned}$$

La première valeur propre est évidente ; il faut encore cependant résoudre  $N - 1$  équations du second degré en  $\lambda$  pour trouver  $N - 1$  paires d'autres valeurs propres. Il s'agit donc de résoudre

$$\lambda^2 - \Gamma_i \lambda + \Lambda_i = 0$$

pour  $i = 2, \dots, N$ .

Nous avons donc bien  $2N - 1$  valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \Gamma_1 \\ \lambda_{2i-2} &= \frac{\Gamma_i - \sqrt{\Gamma_i^2 - 4\Lambda_i}}{2} \quad (i = 2, \dots, N) \\ \lambda_{2i-1} &= \frac{\Gamma_i + \sqrt{\Gamma_i^2 - 4\Lambda_i}}{2} \quad (i = 2, \dots, N) \end{aligned}$$

#### 5.2.4 Analyse de stabilité

Pour rappel, nous avons défini en (5.6), (5.7) et (5.8)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\triangleq -\frac{a\alpha}{v_{01}} \\ \Gamma_i &\triangleq -a \left( \frac{\alpha}{v_{0i}} \left( \frac{v_{01}}{v_{0i}} \right)^{\alpha-1} + \beta \left( 1 - \left( \frac{v_{01}}{v_{0i}} \right)^\alpha \right) \left( \frac{T + \frac{v_{01}}{2\sqrt{ab}}}{s_0 + v_{01}T} \right) \right) \\ \Lambda_i &\triangleq \frac{a\beta \left( 1 - \left( \frac{v_{01}}{v_{0i}} \right)^\alpha \right)^{1+\frac{1}{\beta}}}{s_0 + v_{01}T} \end{aligned}$$

Comme nous supposons que l'équilibre existe<sup>4</sup>, la quantité

$$\left( 1 - \left( \frac{v_{01}}{v_{0i}} \right)^\alpha \right)$$

est strictement positive pour tout  $i = 2, \dots, N$  ; tous les autres paramètres étant positifs, on déduit que  $\Lambda_i > 0$  pour tous les véhicules. Distinguons alors deux cas :

– Soit  $\Gamma_i^2 - 4\Lambda_i \geq 0$ . Comme  $\Lambda_i > 0$ , on a

$$\sqrt{\Gamma_i^2 - 4\Lambda_i} < |\Gamma_i|$$

Par conséquent,

$$\lambda_1 = \Gamma_1 = -\frac{a\alpha}{v_{01}} < 0$$

---

4. i.e.  $v_{0i} > v_{01} \quad \forall i = 2, \dots, N$

$$\begin{aligned}\lambda_{2i-2} &= \frac{\Gamma_i - \sqrt{\Gamma_i^2 - 4\Lambda_i}}{2} < \Gamma_i < 0 \\ \lambda_{2i-1} &= \frac{\Gamma_i + \sqrt{\Gamma_i^2 - 4\Lambda_i}}{2} < \frac{\Gamma_i + |\Gamma_i|}{2} = 0\end{aligned}$$

pour  $i = 2, \dots, N$ . Il s'ensuit que  $\Re(\lambda_i) < 0$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

- Soit  $\Gamma_i^2 - 4\Lambda_i < 0$ . La racine carrée est alors remplacée par un terme purement imaginaire ;  $\Gamma_i$  étant strictement négatif, on a  $\Re(\lambda_i) < 0$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

Sur base du Théorème 1, la condition

$$1 - \left(\frac{v_{01}}{v_{0i}}\right)^\alpha > 0 \Leftrightarrow v_{0i} > v_{01} \quad \forall i = 2, \dots, N \quad (5.15)$$

implique que l'équilibre  $\mathbf{x}^*$  du système linéarisé relatif à (5.2) est asymptotiquement stable.

En d'autres mots plus intuitifs, dès que l'ensemble du trafic atteint un état d'équilibre, il a tendance à rester même sous l'effet de légères perturbations (vent, erreurs de mesure, ...).

### Stabilité par paquets

La condition (5.15) correspond au fait qu'un trafic restera groupé autour de sa position stationnaire tant que **tous** les véhicules ont des vitesses préférentielles strictement supérieures au véhicule de tête ; cependant, dès qu'un de ces véhicules abaisse sa vitesse désirée en dessous du seuil  $v_{01}$ , une cassure apparaît entre lui et son prédécesseur et il devient le premier véhicule d'un nouveau peloton ; à titre d'exemple, considérons le profil de vitesses désirées repris à la Fig. 5.1. La huitième voiture est la première de la file à rouler en dessous de la vitesse désirée du véhicule de tête. Une cassure apparaît donc entre les véhicules 7 et 8 (Fig. 5.2). La voiture 8 prend alors la tête d'un second peloton de véhicules. Le véhicule 13 ayant lui même une vitesse désirée inférieure à celle de la voiture 8, un troisième peloton surgit, emmené par le véhicule 13.

Même un système d'ACC ne peut donc éviter ce type de circulation par "paquets" rencontrés dans la conduite humaine (par exemple sur les routes de montagne derrière un autocar).

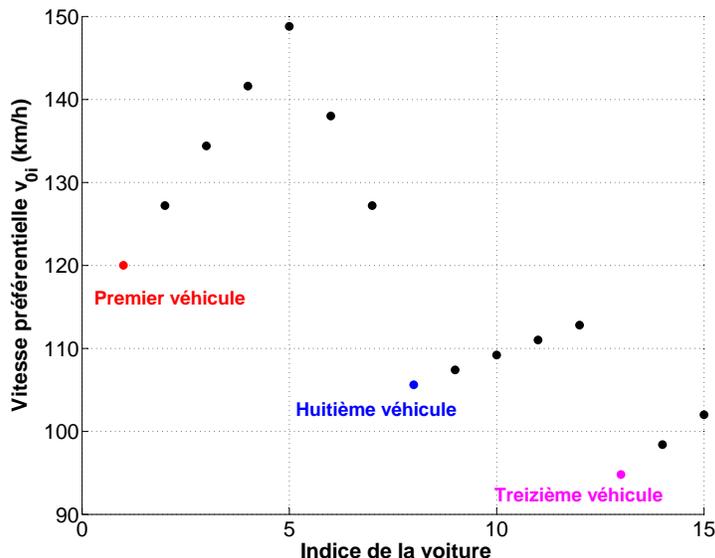


FIGURE 5.1 – Profils de vitesses désirées pour  $N = 15$  voitures ; voir la Fig. 5.2 pour l'évolution du trafic correspondant.

### 5.3 Stabilité asymptotique "semi-globale"

Le résultat énoncé à la section précédente présente l'avantage de considérer le trafic vu comme un ensemble puisque nous avons étudié le comportement simultané des  $N$  voitures autour de la position d'équilibre ; en revanche, le caractère attractif de l'équilibre n'est valable qu'à l'approximation linéaire près, c'est-à-dire pour des vitesses et des espacements proches de l'équilibre.

Nous développons dans cette section un résultat plus fort en terme de stabilité mais plus restrictif concernant les hypothèses sur le trafic : nous étudions en effet le comportement du véhicule  $n$  en supposant que le véhicule  $n - 1$  est, lui, à l'équilibre (i.e. roulant à vitesse  $v_{01}$ ). Le système dynamique relatif au véhicule  $n$  est donc réduit à un système de dimension deux :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_n &= v_{01} - v_n \\ \dot{v}_n &= a \left( \phi(v_n) - \frac{h(v_n)}{(\Delta x_n)^\beta} \right) \end{cases} \quad (5.16)$$

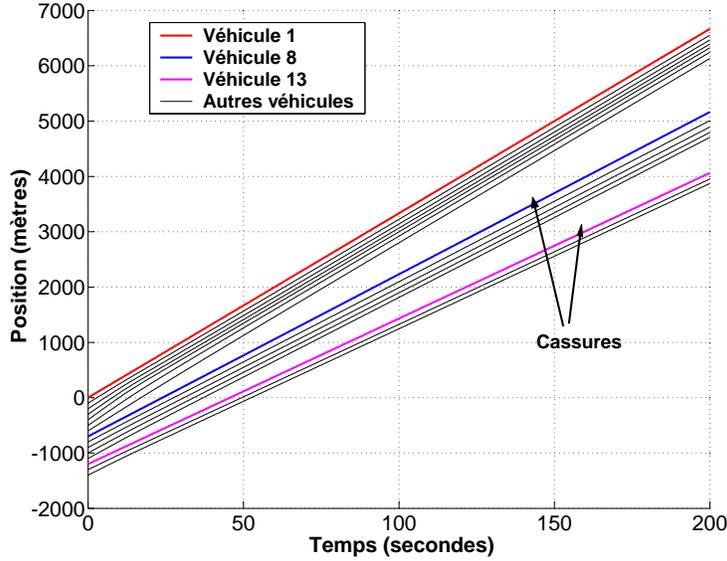


FIGURE 5.2 – Evolution d'un trafic instable correspondant à  $N = 15$  voitures ayant un profil de vitesses désirées représenté à la Fig. 5.1

où on a posé par simplicité

$$\phi(v_n) \triangleq 1 - \left( \frac{v_n}{v_{0n}} \right)^\alpha$$

et

$$h(v_n) \triangleq \left( s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{01})}{2\sqrt{ab}} \right)^\beta$$

Ici, le vecteur d'état est

$$\mathbf{x} \triangleq [\Delta x_n \quad v_n]^T$$

et l'équilibre de ce système est donné par

$$\mathbf{x}^* = \begin{cases} v_n^* & = v_{01} \\ \Delta x_n^* & = \frac{s_0 + v_{01}T}{\left(1 - \left(\frac{v_{01}}{v_{0n}}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}}} \end{cases} \quad (5.17)$$

Avant de poursuivre, nous rappelons la définition d'ensemble invariant :

**Définition 5** Soit le système dynamique  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  avec  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Un ensemble  $\Omega \subset \mathcal{D}$  est dit invariant si toute trajectoire qui démarre dans  $\Omega$  reste confinée dans  $\Omega$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Remarquons, d'après cette définition, que l'ensemble

$$\mathcal{D} = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[$$

est invariant pour le système d'ACC, d'après les résultats du chapitre précédent.

Le théorème suivant [14], dû à La Salle, permettra d'établir la stabilité asymptotique de l'équilibre.

**Théorème 2** (*La Salle*). *Soit  $\Omega \subset \mathcal{D}$  un ensemble compact invariant pour le système dynamique  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ . Soit  $\mathcal{V} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable telle que  $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \leq 0$  dans  $\Omega$ . Définissons l'ensemble*

$$E \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid \dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = 0 \right\}$$

*et soit  $M$  le plus grand ensemble invariant de  $E$ . Alors, toute trajectoire qui démarre dans  $\Omega$  approche  $M$  quand  $t \rightarrow \infty$ .*

En particulier (Khalil, [14]), si l'ensemble

$$\Omega_c \triangleq \{ \mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \mathcal{V}(\mathbf{x}) \leq c \}$$

est borné et que  $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \leq 0$  dans  $\Omega_c$ , alors  $\Omega_c$  est invariant et le théorème est d'application pour  $\Omega = \Omega_c$ .

### 5.3.1 Fonction $\mathcal{V}$

Considérons la fonction

$$\tilde{\mathcal{V}}_1(\Delta x_n) \triangleq a \left( \phi(v_{01}) \Delta x_n + \frac{h(v_{01})}{\beta - 1} \cdot \frac{1}{\Delta x_n^{\beta-1}} \right)$$

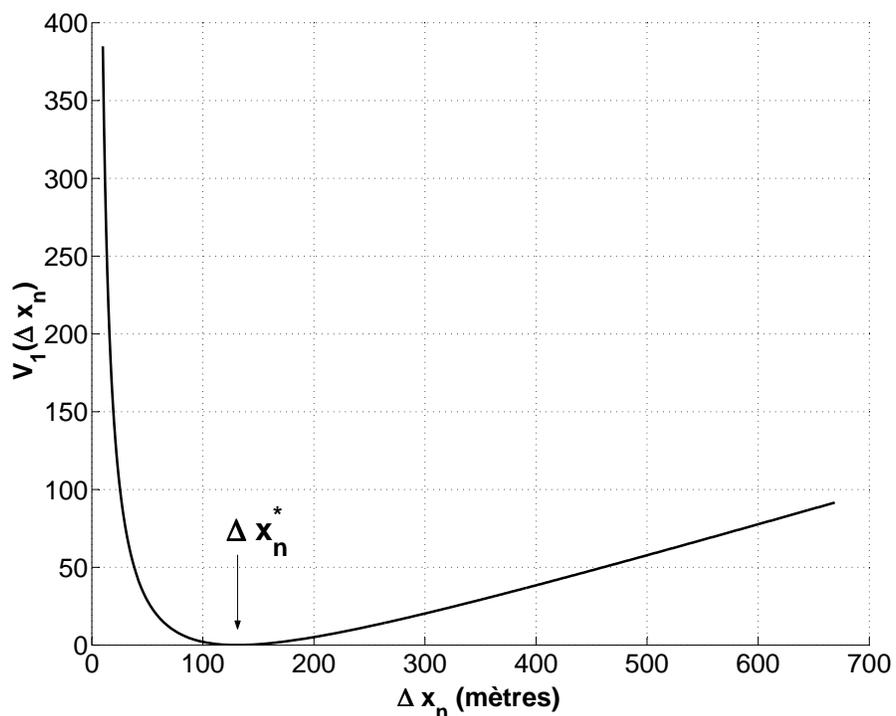
Cette fonction est toujours positive étant donné que  $\beta > 1$  et  $\phi(v_{01}) > 0$  par hypothèse. De plus,

$$\frac{d\tilde{\mathcal{V}}_1}{d\Delta x_n} = a \left( \phi(v_{01}) - \frac{h(v_{01})}{\Delta x_n^\beta} \right)$$

est nulle en  $\Delta x_n^*$ , ce qui indique que  $\tilde{\mathcal{V}}_1$  est minimale en  $\Delta x_n^*$ . Cependant, cette fonction n'étant pas nulle à l'équilibre, définissons une première fonction auxiliaire  $\mathcal{V}_1$  comme

$$\mathcal{V}_1(\Delta x_n) \triangleq \tilde{\mathcal{V}}_1(\Delta x_n) - \tilde{\mathcal{V}}_1(\Delta x_n^*)$$

De cette manière,  $\mathcal{V}_1(\Delta x_n)$  est une fonction définie positive représentée à la Fig. 5.3.


 FIGURE 5.3 – Aperçu de la fonction  $\mathcal{V}_1(\Delta x_n)$ , définie positive et minimale à l'équilibre.

D'autre part, considérons la seconde fonction auxiliaire

$$\mathcal{V}_2(v_n) \triangleq \frac{1}{2}(v_n - v_{01})^2$$

qui est également définie positive. Alors,

$$\mathcal{V}(\Delta x_n, v_n) \triangleq \mathcal{V}_1(\Delta x_n) + \mathcal{V}_2(v_n)$$

est continûment différentiable dans  $\mathcal{D} = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[$  et sa dérivée temporelle le long des trajectoires

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(\Delta x_n, v_n) &= \frac{d\mathcal{V}_1}{d\Delta x_n} \cdot \Delta \dot{x}_n + \frac{d\mathcal{V}_2}{dv_n} \cdot \dot{v}_n \\ &= a \left[ \left( \phi(v_{01}) - \frac{h(v_{01})}{\Delta x_n^\beta} \right) (v_{01} - v_n) + (v_n - v_{01}) \left( \phi(v_n) - \frac{h(v_n)}{\Delta x_n^\beta} \right) \right] \\ &= a(v_n - v_{01}) \left[ (\phi(v_n) - \phi(v_{01})) - \frac{1}{\Delta x_n^\beta} (h(v_n) - h(v_{01})) \right] \end{aligned}$$

est toujours négative ; en effet,

$$(v_n - v_{01}) \cdot (\phi(v_n) - \phi(v_{01})) = (v_n - v_{01}) \cdot \frac{(v_{01}^\alpha - v_n^\alpha)}{v_{01}^\alpha} \leq 0$$

D'autre part, nous avons posé par définition

$$h(v_n) \triangleq \left( s_0 + v_n T + \frac{v_n(v_n - v_{01})}{2\sqrt{ab}} \right)^\beta$$

Il s'ensuit que  $v_n \geq v_{01}$  implique  $h(v_n) - h(v_{01}) \geq 0$  et  $v_n \leq v_{01}$  implique  $h(v_n) - h(v_{01}) \leq 0$

La fonction  $\mathcal{V}$  est donc telle que  $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$  partout dans  $\mathcal{D}$ .

### 5.3.2 Ensemble invariant $\Omega_c$

L'ensemble  $\mathcal{D}$  n'étant pas compact (car ouvert), on ne peut malheureusement l'utiliser pour le Théorème 2. Cependant, nous pouvons vérifier que  $\Omega_c$ , défini en dessous de ce théorème, est compact. Pour ce faire, nous montrons que, pour tout  $c \geq 0$ , l'équilibre appartient à  $\Omega_c$  et que la frontière de cet ensemble est une courbe continue et fermée. Comme  $\mathcal{V}$  est définie positive et nulle à l'équilibre, il est clair que  $\mathbf{x}^* \in \Omega_c$  pour  $c \geq 0$ .

Quant à la frontière de  $\Omega_c$ , elle est décrite par

$$\partial\Omega_c = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \mathcal{V}(\mathbf{x}) = c \}$$

Cette "courbe de niveau" est donc constituée de l'ensemble des couples  $(\Delta x_n, v_n)$  tels que

$$\frac{1}{2}(v_n - v_{01})^2 = c - \mathcal{V}_1(\Delta x_n) \quad (5.18)$$

Or, quel que soit  $c \geq 0$ , il existe toujours  $0 < \Delta x_n^{(-)} \leq \Delta x_n^*$  et  $\Delta x_n^{(+)} \geq \Delta x_n^*$  tels que le membre de droite de (5.18) soit positif sur cet intervalle  $[\Delta x_n^{(-)}, \Delta x_n^{(+)})$ , puisque  $\mathcal{V}_1$  est une fonction positive, continue, qui s'annule en  $\Delta x_n^*$  et telle que

$$\lim_{\Delta x_n \rightarrow s_0} \mathcal{V}_1(\Delta x_n) = \lim_{\Delta x_n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_1(\Delta x_n) = +\infty$$

En résumé, pour tout  $c \geq 0$ , la frontière de  $\Omega_c$  existe et est caractérisée par

$$\partial\Omega_c \triangleq \left\{ (\Delta x_n, v_n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid \Delta x_n \in [\Delta x_n^{(-)}, \Delta x_n^{(+)}] \text{ et } v_n = v_{01} \pm \sqrt{2(c - \mathcal{V}_1(\Delta x_n))} \right\}$$

La courbe  $\partial\Omega_c$  est donc définie au moyen de deux courbes symétriques autour de  $v_n = v_{01}$  ; celles-ci sont continues car les  $v_n$  sont l'image de l'intervalle

$$[\Delta x_n^{(-)}, \Delta x_n^{(+)}]$$

par une fonction continue ; de plus, ces deux courbes coïncident aux points  $(\Delta x_n^{(-)}, v_{01})$  et  $(\Delta x_n^{(+)}, v_{01})$ .

L'ensemble  $\Omega_c$  est donc fermé et borné (i.e. compact). Les courbes de niveau de  $\mathcal{V}$  sont représentées à la Fig. 5.4.

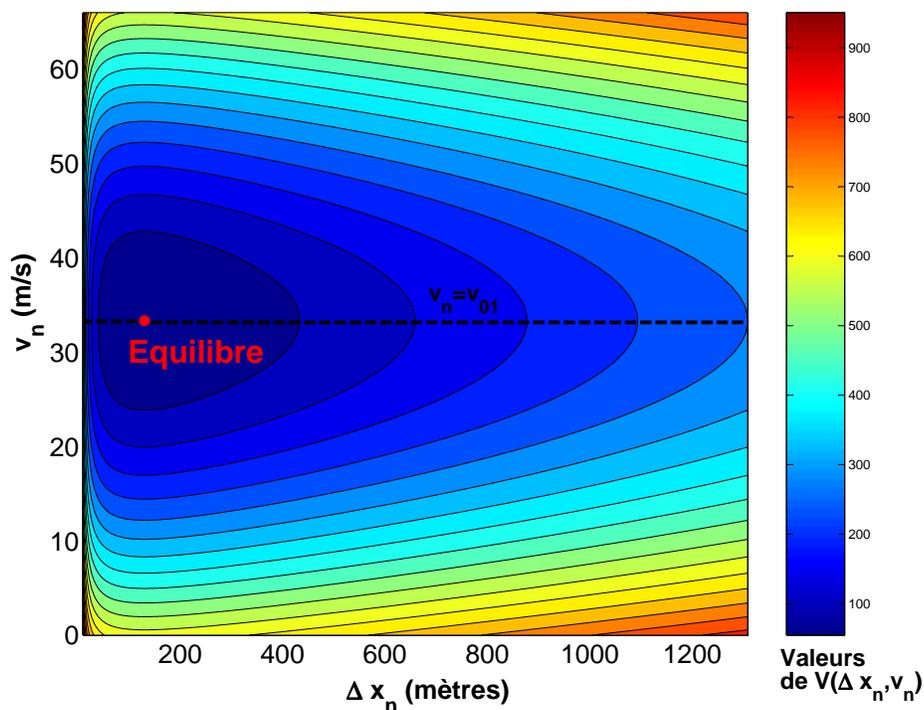


FIGURE 5.4 – Fonction de contour de  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$

### 5.3.3 Application du Théorème de La Salle

Nous avons montré à la Section 5.3.1 que  $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$  dans  $\mathcal{D}$ . On a donc *a fortiori*  $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$  dans  $\Omega_c \cap \mathcal{D}$  et ce dernier ensemble est borné, puisque  $\Omega_c$  l'est. Enfin,  $\Omega_c \cap \mathcal{D}$  est fermé car cet ensemble est égal à  $\Omega_c$  limité aux  $v_n \geq 0$ .

L'ensemble  $E$  du Théorème 2 est clairement l'ensemble  $\{v_n = v_{01}\}$ , d'après le calcul de  $\dot{\mathcal{V}}$ . Le plus grand invariant de cet ensemble est l'équilibre  $(\Delta x_n^*, v_n^*)$ .

Par conséquent, toute trajectoire démarrant dans  $\Omega_c \cap \mathcal{D}$  reste non seulement dans cet ensemble (puisque  $\Omega_c$  et  $\mathcal{D}$  sont chacun invariants) mais s'approche également de l'équilibre lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

Il reste à savoir si  $\Omega_c \cap \mathcal{D}$  peut couvrir une région arbitrairement grande de conditions initiales ; c'est manifestement le cas : soit une condition initiale quelconque  $(\Delta x_n(0), v_n(0))$  dans  $\mathcal{D}$  et soit

$$\mathcal{V}(\Delta x_n(0), v_n(0)) = K \geq 0$$

L'ensemble  $\Omega_K \cap \mathcal{D}$  est compact, invariant, contient l'équilibre et tel que  $\dot{\mathcal{V}}$  dans cet ensemble ; le théorème de La Salle est donc d'application.

Toute trajectoire démarrant dans  $\mathcal{D}$  reste donc dans  $\mathcal{D}$  et tend vers l'équilibre  $(\Delta x_n^*, v_n^*)$ .

## 5.4 Comparaison avec un modèle de conduite naturelle

Après avoir analysé séparément les deux modèles microscopiques d'ACC et, à la Section 2.2 (p. 10), de Cho et Wu (des modèles de conduites respectivement assistée et naturelle), nous proposons de les comparer entre eux. L'intérêt d'une telle procédure est de cibler les éléments qui différencient un trafic automatisé d'un trafic laissé à lui-même.

La première différence qui saute aux yeux lorsqu'on considère les lois de vitesse est le type de système : l'un est en temps continu alors que l'autre est en temps discret et c'est justifié : un ordinateur de bord est sans cesse en train de recevoir des informations et fournit l'accélération souhaitée quasi-instantanément ; au contraire, un humain évalue l'état du trafic à intervalles plus ou moins réguliers.

Ensuite, la formulation de Cho et Wu prescrit une *vitesse* alors que le système d'ACC fournit une *accélération*. Le second choix est la plus réaliste puisque c'est l'accélération du véhicule (et non sa vitesse) qui est proportionnel à l'enfoncement de la pédale d'accélérateur.

Mais la différence la plus marquante tient dans les conditions de stabilité. Nous avons vu que tout équilibre est nécessairement linéairement stable pour le modèle d'ACC. C'est plus restrictif pour le modèle en temps discret (Fig. 2.3, p. 17) : une

voiture atteint l'équilibre si elle souhaite aller plus vite que la précédente, sans cependant vouloir aller trop vite.

La Fig. 5.5 reproduit le même scénario que la Fig. 3.11 (p. 28) : les véhicules, plus proches les uns des autres grâce au système d'ACC, ne subissent pas de ralentissement en aval comme c'était le cas pour la conduite humaine, et le débit autoroutier est clairement augmenté.

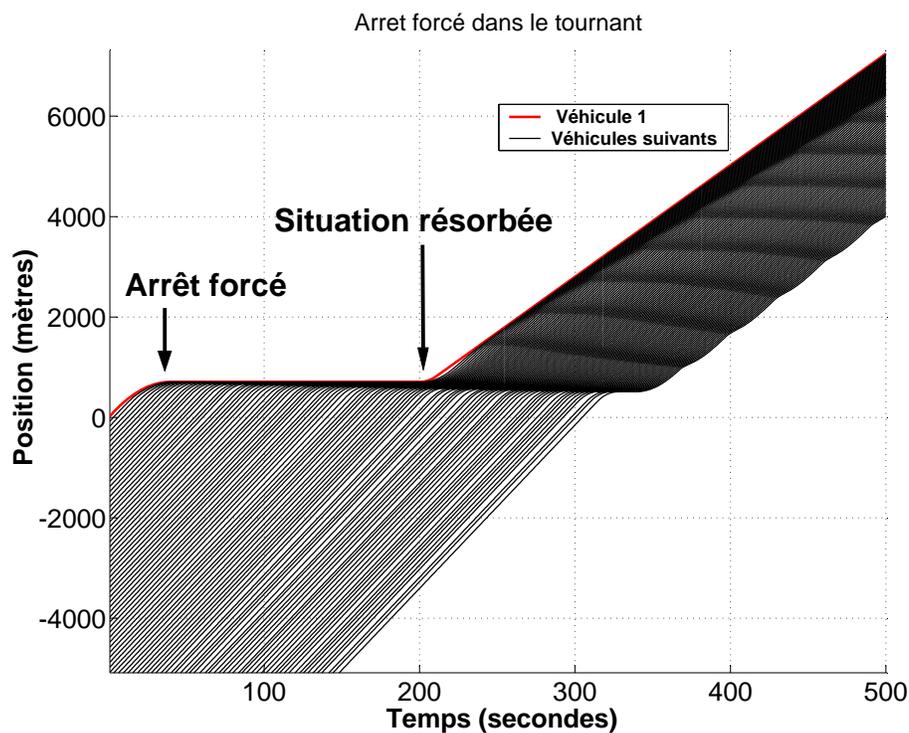


FIGURE 5.5 – Positions de 100 véhicules contrôlés par ACC, dont le premier subit un arrêt forcé pendant 2 minutes.

## **Troisième partie**

### **Jonctions et autoroutes à plusieurs bandes**

# Chapitre 6

## Processus de changement de bande

La route serait bien ennuyante si elle se résumait aux modèles à une bande présentés jusqu'à présent. Quiconque a déjà été coincé derrière un tracteur sur une petite route de campagne sait combien il est agaçant et stressant de devoir attendre avec patience "le" moment où le dépassement pourra s'opérer.

La géométrie de certaines routes, et des autoroutes en particulier, a été conçue sur plusieurs bandes afin de permettre à chaque véhicule de rouler à sa vitesse préférentielle. Des modèles de trafic routier qui se veulent réalistes doivent donc incorporer, en plus d'une dynamique longitudinale, une dynamique latérale de changement de bande.

La littérature en la matière est moins abondante que pour les modèles simplifiés à une seule bande ([9], [10], [15], [16]). La raison est double : premièrement, il existe beaucoup moins de données à disposition pour les mouvements latéraux des véhicules que pour les mouvements longitudinaux et, deuxièmement, la décision pour un utilisateur de changer de bande est un processus beaucoup plus complexe que le simple fait d'appuyer sur l'accélérateur ou de freiner. Il s'agit en effet pour le conducteur d'évaluer la situation du trafic sur la bande "cible" (voir Fig. 6.1), tout en gardant un œil sur sa bande à lui, et en respectant les règles de priorité ; voilà qui rend la modélisation du changement de bande peu évidente.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques modèles simples approximant ce processus complexe. Le Chapitre 7 sera l'occasion de constater l'impact d'une rampe d'accès sur la circulation ainsi que d'étudier la convergence du trafic sur deux bandes vers un état d'équilibre.

## 6.1 Origine du changement de bande

Les raisons qui poussent un utilisateur à changer de bande sont diverses (Gipps, 1986, *in* [9]) : éviter une obstruction (travaux, accident, panne), suivre son itinéraire (à l'approche d'échangeurs par exemple), dépasser des véhicules lourds, diminuer son temps de parcours, choisir la file la plus courte à l'approche d'embouteillages...

Les modèles les plus anciens (Gipps, 1986, *in* [9]) supposent que le changement n'est possible qu'en cas de trafic léger, i.e. à faible densité; les simulations sont alors peu réalistes puisqu'en cas de trafic plus dense, il peut arriver qu'un véhicule reste coincé en fin de rampe d'accès ou derrière un véhicule lent. Les modèles présentés à la Section 6.2 surmontent cette difficulté en admettant que les conducteurs peuvent forcer leur manœuvre lorsque la situation devient critique sur leur bande.

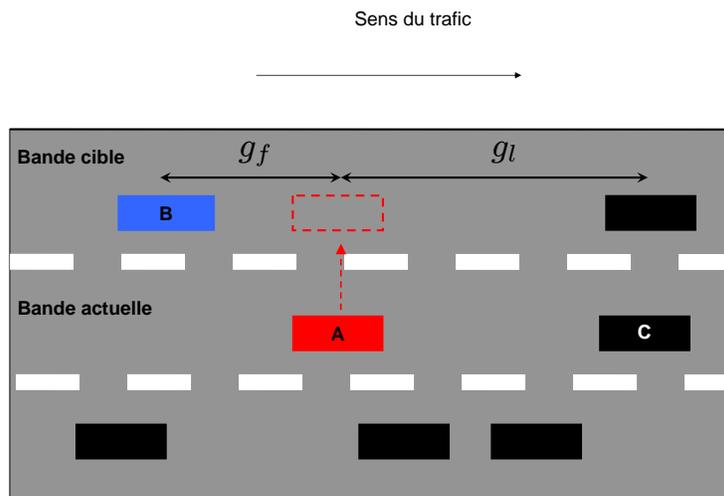


FIGURE 6.1 – Configuration d'une route à plusieurs bandes. Le véhicule A souhaite rejoindre la bande "cible" sur laquelle se trouve le véhicule B.

## 6.2 Quelques modèles répandus

Quel que soit le type de conducteur auquel on a affaire, ce dernier se pose toujours trois questions consécutives avant de changer de bande :

1. *Y a-t-il une raison de quitter ma bande ?* Si oui, aller au point 2. Si non, annuler la procédure.
2. *Quelle est ma bande cible ?* (à droite ou à gauche de la bande actuelle)
3. *Ma manœuvre est-elle faisable ?* (d'après un certain critère). Si oui, effectuer la manœuvre. Si non, annuler la procédure.

C'est le point 3. qui différencie les modèles entre eux ; il est en effet nécessaire de définir un critère de faisabilité, un coût attaché à la manœuvre, prenant en compte le risque d'accident, le freinage des voitures environnantes occasionné par le changement de bande, la satisfaction apportée au conducteur par l'opération, etc.

### 6.2.1 Modèle de Hidas

Hidas [10] soutient que les conducteurs raisonnent de trois manières, selon l'état du trafic :

- dans le cas d'un trafic léger, un véhicule peut changer de bande si, après la manœuvre, les distances  $g_f$  et  $g_l$  devant et derrière lui (Fig. 6.1) sont supérieures à deux seuils, respectivement  $g_{f,min}$  et  $g_{l,min}$  (si ce n'est pas le cas, l'opération n'a pas lieu).
- dans le cas où le trafic est plus dense mais que le conducteur B est prêt à coopérer<sup>1</sup>, ce dernier évalue la décélération à appliquer à son propre véhicule afin de laisser passer A et afin que les distances  $g_f$  et  $g_l$  soient, évidemment, toujours supérieures aux seuils préconisés (Fig. 6.1) ; si cette décélération est raisonnable, B ralentit et A change de bande.
- enfin, dans le cas où le trafic est dense et que le conducteur B n'est pas prêt à coopérer, A estime la décélération que doit subir B si le changement est forcé. Si cette décélération est raisonnable (et que les distances  $g_f$  et  $g_l$  sont toujours supérieures aux seuils), le changement a lieu.

---

1. En théorie, aucun utilisateur n'a intérêt à coopérer car cela diminue sa vitesse et donc son temps de parcours. Cependant, il existe (heureusement !) une certaine empathie entre les conducteurs...

### 6.2.2 Modèle de Kita

Dans une approche inspirée de la théorie des jeux, Kita [15] suppose que les véhicules A et B se comportent de manière de maximiser leur satisfaction personnelle en anticipant la stratégie de l'autre. Plus précisément, deux matrices de gains sont attribuées à A et à B respectivement, dont la signification est donnée à la Fig. 6.2.

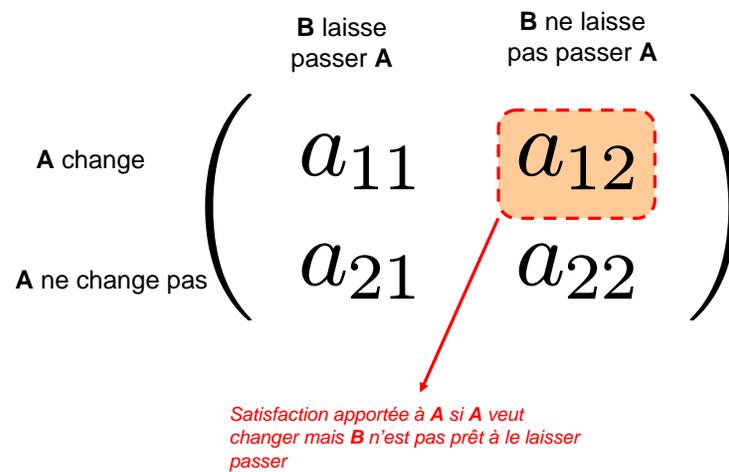


FIGURE 6.2 – Matrice de gains pour le conducteur A (la matrice pour le conducteur B est similaire). Chaque entrée  $(i, j)$  exprime la satisfaction apportée à A lorsque A envisage l'opération  $i$  et B l'opération  $j$ .

Les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  des matrices de gain de A et B, respectivement, sont calculés sur base du "temps avant collision". Par exemple (Fig. 6.1), si la voiture A roule à 30 m/s et que la distance qui la sépare de C (roulant à 20m/s) est de 50 m, le temps avant collision est de 5 s. Plus ce temps est faible, plus la satisfaction de changer de bande sera grande pour A.

Dans son article, Kita montre qu'il existe toujours un équilibre à ce "jeu" que constitue le changement de bande.

### 6.2.3 Modèle de Kesting et al.

Un troisième modèle que nous présentons est le MOBIL<sup>2</sup> de Kesting et al. [12] (les mêmes auteurs que ceux de l'ACC présenté dans la deuxième partie de ce mémoire) ; à l'inverse des modèles de Hidas et Kita présentés ci-dessus, celui-ci implique trois agents (au lieu de deux) durant le changement de bande (Fig. 6.3) : le véhicule qui désire changer (appelé *véhicule courant*, en rouge sur le schéma), son poursuivant actuel (appelé *ancien poursuivant*, en vert sur le schéma) et son poursuivant en cas de changement de bande (appelé *nouveau poursuivant*, en bleu sur le schéma).

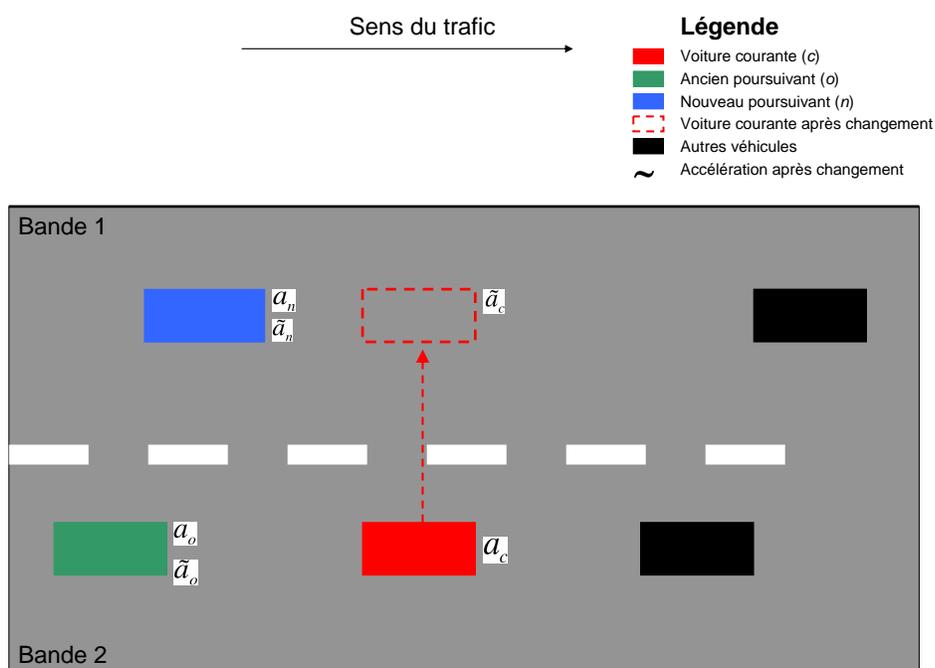


FIGURE 6.3 – Processus de changement de bande dans un modèle à deux bandes (inspiré de [12]).

On définit un coût d'opportunité associé à la manœuvre du véhicule rouge :

$$C \triangleq (\tilde{a}_c - a_c) + p[(\tilde{a}_o - a_o) + (\tilde{a}_n - a_n)] \quad (6.1)$$

2. *Minimizing Overall Braking Change Induced by Lane change*

où

- $a_c$  est l'accélération de la voiture rouge si elle reste sur sa bande ;
- $\tilde{a}_c$  est de la voiture rouge si elle change de bande ;
- $a_n$  est l'accélération de la voiture bleue si la voiture rouge ne change pas de bande ;
- $\tilde{a}_n$  est l'accélération de la voiture bleue si la voiture rouge change de bande ;
- $a_o$  est l'accélération de la voiture verte si la voiture rouge ne change pas de bande ;
- $\tilde{a}_o$  est l'accélération de la voiture verte si la voiture rouge change de bande ;
- $p$  est un facteur de "politesse" qui est représentatif de l'altruisme du conducteur de la voiture rouge.

Les accélérations susmentionnées sont calculées sur base de n'importe quel modèle microscopique. Pour notre part, nous utiliserons la loi d'ACC présentée dans la deuxième partie de ce mémoire ; la simulation numérique réalisée au Chapitre 7 permettra de conclure que le modèle ACC (dont on connaît les propriétés de stabilité sur une bande) est également stable sur deux bandes.

A bien y regarder, les quantités  $\tilde{a}_i - a_i$  de (6.1) représentent le gain (ou la perte) d'accélération de la voiture  $i$  occasionnée par le changement de bande de la voiture rouge. Celle-ci décide alors de changer de bande si la relation

$$C \triangleq (\tilde{a}_c - a_c) + p[(\tilde{a}_o - a_o) + (\tilde{a}_n - a_n)] \geq \Delta a \quad (6.2)$$

est satisfaite ( $\Delta a$  représente un gain critique d'accélération). En d'autres mots, le changement de bande a lieu si une certaine pondération des gains/pertes d'accélération des trois véhicules concernés par la manœuvre est supérieure à un seuil critique.

Pour mettre les choses au clair, nous avons considéré plusieurs cas de figure pour  $p$  et  $\Delta a$  (Tab. 6.1).

$p = 1, \Delta a \approx 0$	Egalitaire : le changement de bande s'effectue si la moyenne globale des gains d'accélération est positive
$p = 1, \Delta a \gg 0$	Egalitaire et peu risqué : un grand gain global d'accélération est requis pour changer de bande
$p = 1, \Delta a \ll 0$	Egalitaire mais risqué : le changement s'effectue même si les voitures doivent en moyenne freiner relativement fort
$p \gg 0, \Delta a \approx 0$	Altruiste : le changement de la voiture courante s'effectue surtout si les autres voitures y gagnent
$p = 0, \Delta a \approx 0$	Egoïste : la voiture courante ne se soucie pas de son entourage et veille seulement à son propre intérêt
$p \ll 0, \Delta a \approx 0$	Vicieux : la voiture courante ne change de bande que si son intérêt personnel prime sur celui des autres

TABLE 6.1 – Quelques comportements de conduite en fonction des paramètres  $p$  et  $\Delta a$  du modèle de changement de bande (6.2)

# Chapitre 7

## Effets sur le trafic

Nous implémentons dans ce chapitre le modèle de Kesting et al. pour le changement de bande contrôlé sous ACC (introduit au chapitre précédent, Eq. (6.2)). Deux questions sont évoquées :

- nous traitons d’abord le cas des rampes d’accès et de leur impact sur le trafic. En effet, ces rampes agissent comme des jonctions et les observations indiquent un phénomène de diminution de débit à l’endroit de la jonction par rapport au débit théoriquement réalisable (*Capacity drop phenomenon*, [8]). Cette diminution peut atteindre 15 % et reflète donc le fait que les automobilistes se gênent l’un l’autre à l’endroit de la jonction, occasionnant une diminution globale du débit possible.
- enfin, nous étudions l’évolution d’un trafic quelconque sur deux bandes ; les conclusions permettent d’établir<sup>1</sup> que, pour toute répartition initiale de véhicules sur les deux bandes, le trafic aura tendance à rejoindre un état dans lequel tous les conducteurs se trouvent sur la bande de droite, classés par ordre décroissant de leurs vitesses préférentielles.

### 7.1 Rampe d’accès

La Fig. 7.1 représente une rampe d’accès élémentaire. Sur la bande de gauche,  $N_1$  véhicules sont en circulation ; sur la rampe d’accès,  $N_2$  mobiles doivent impérativement changer de bande entre  $x = 0$  m et  $x = 500$  m afin de ne pas heurter le véhicule virtuel placé à l’arrêt en fin de rampe et définissant la longueur de celle-ci.

---

1. sur base d’arguments numériques et non théoriques

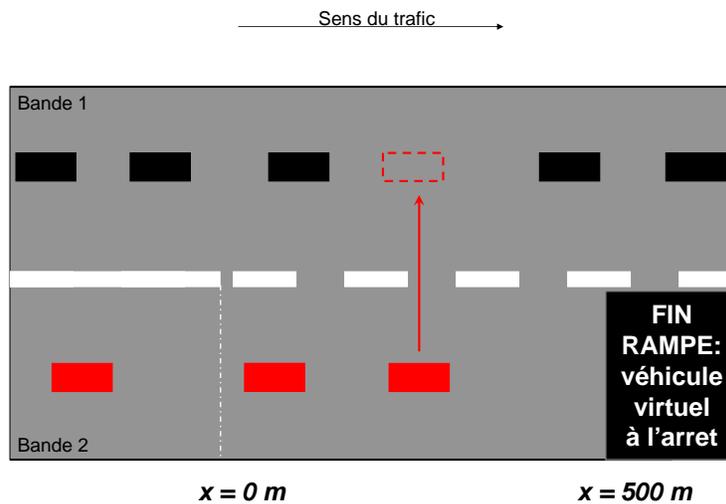


FIGURE 7.1 – Rampe d'accès modélisée comme une route multi-bandes dont la bande de droite est condamnée par une voiture à l'arrêt

### 7.1.1 Implémentation

Nous avons défini, pour chaque bande, trois matrices; celles-ci contiennent respectivement les positions, vitesses et accélérations de chaque véhicule. Ces matrices possèdent autant de colonnes que de pas de temps prévus pour la simulation, et autant de lignes que de voitures sur la bande concernée. Dès qu'un changement de bande a lieu, les matrices de la bande 2 perdent une ligne (relative au véhicule qui a changé) et celle-ci est rajoutée dans les matrices de la bande 1. Lorsque toutes les voitures de la rampe se sont intégrées au trafic, les trois matrices de la rampe d'accès sont donc vides.

A chaque itération du programme, et pour chaque véhicule de la bande de droite, le coût d'opportunité (6.1) est évalué. Le paramètre  $\Delta a$  est fixé, mais nous faisons décroître  $p$  linéairement en fonction de la position du véhicule sur la rampe. De cette manière, les conducteurs de la rampe deviennent de moins en moins courtois lorsqu'ils approchent de la fin de la rampe, et forcent finalement leur passage au détriment des voitures de la bande 1.

### 7.1.2 Résultats

La Fig. 7.2 montre la manière dont  $N_2 = 10$  véhicules (en rouge) sur cette rampe s'immiscent dans le trafic de la bande de gauche (en noir). Dans cette simulation, nous avons considéré une conduite "gentille" dans la mesure où le facteur de politesse démarre à  $p = 2$  en début de rampe (très altruiste) et diminue linéairement jusque  $p = 0$  au niveau de la fin de la rampe. On constate que cinq voitures sont restées coincées en fin de rampe et ont dû attendre le passage de toutes les voitures de la bande de gauche avant de se déporter.

Dans le second cas (Fig. 7.3), nous avons pris des véhicules un peu plus agressifs :  $p$  va de 0 à  $-1$  au fur et à mesure qu'on avance sur la rampe. Le résultat est que toutes les voitures changent de bande avant la fin de la rampe. Ce faisant, elles forcent les véhicules de la bande de gauche à se rapprocher les uns des autres.

Enfin (Fig. 7.4), un trafic plus dense a été considéré (les espacements initiaux sont plus faibles qu'aux deux premières expériences). Le gain critique d'accélération a été abaissé à  $-5 \text{ m/s}^2$  (ce qui signifie que le changement de bande est opéré même si la somme pondérée des gains d'accélération est supérieure à  $-5 \text{ m/s}^2$ ). Ce type de conduite est relativement risqué; en témoigne le fort ralentissement subi par les voitures de la bande de gauche (en noir).

A l'occasion de cette dernière expérience, nous avons également relevé, après  $t = 50$  secondes (soit le moment où toutes les voitures de la rampe sont passées sur la bande 1), le débit du trafic en fonction de la position sur la bande 1. En d'autres mots, pour chaque véhicule de la bande de gauche, nous avons divisé sa vitesse par l'espacement avec le véhicule précédent (obtenant ainsi le débit local) et nous avons mis cette mesure en correspondance avec la position occupée par le véhicule (Fig. 7.5). Le débit est constant en amont de la rampe; il augmente d'abord car les espacements se réduisent à l'approche de la rampe; suite au freinage occasionné par les véhicules de la rampe, le débit diminue ensuite fortement à l'endroit où se mêlent les mobiles (à environ 500 m). Enfin, la situation se résorbe en aval; le débit augmente car les véhicules accélèrent tout en restant proches, puis diminue car les espacements se creusent alors que les vitesses se stabilisent autour des vitesses préférentielles des utilisateurs.

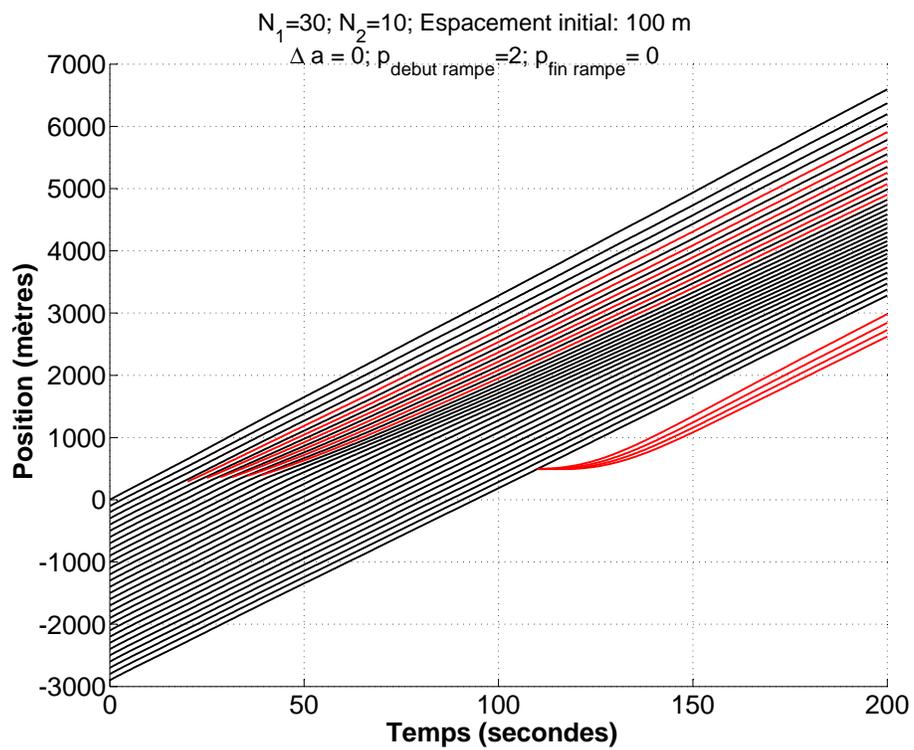


FIGURE 7.2 – Positions des véhicules sur la bande 1 : les véhicules initialement sur cette bande sont représentés par des lignes noires ; ceux qui proviennent de la rampe d'accès sont en rouge.

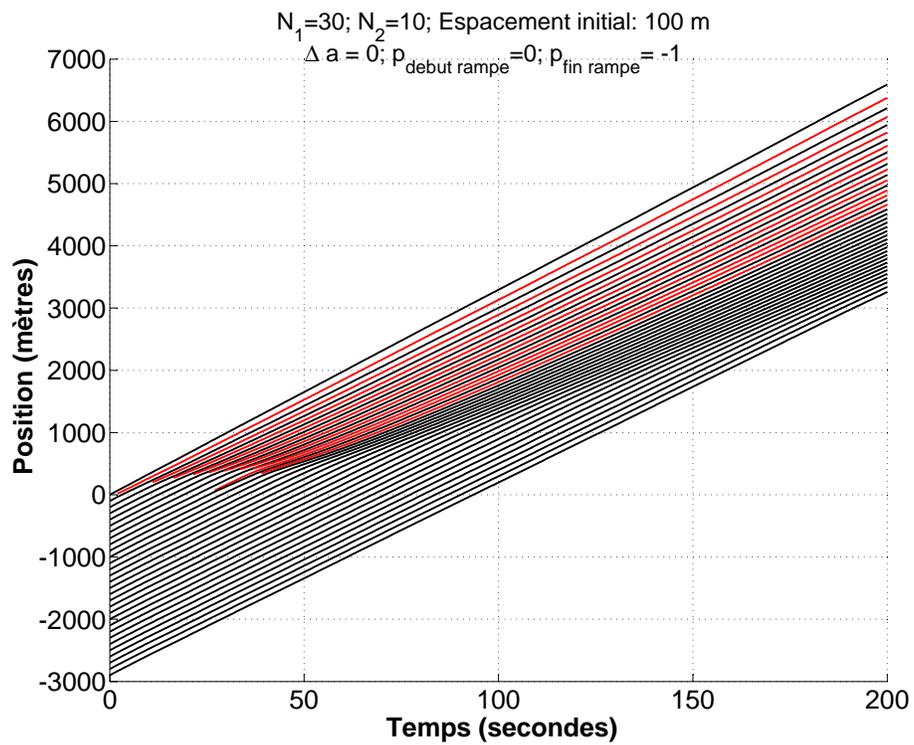


FIGURE 7.3 – Positions des véhicules sur la bande 1 : les véhicules initialement sur cette bande sont représentés par des lignes noires ; ceux qui proviennent de la rampe d'accès sont en rouge.

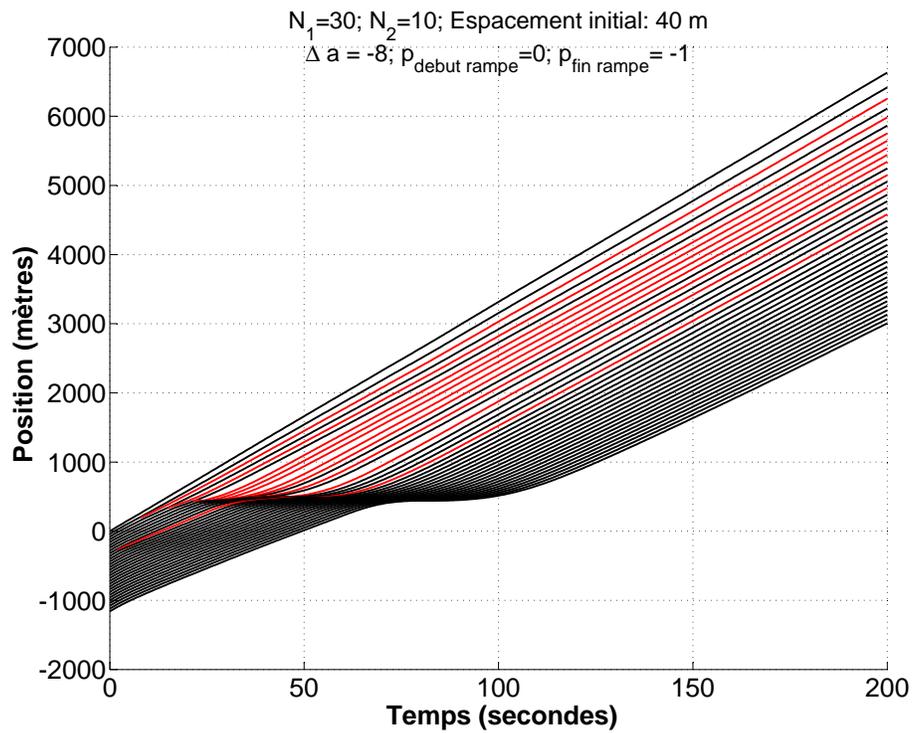
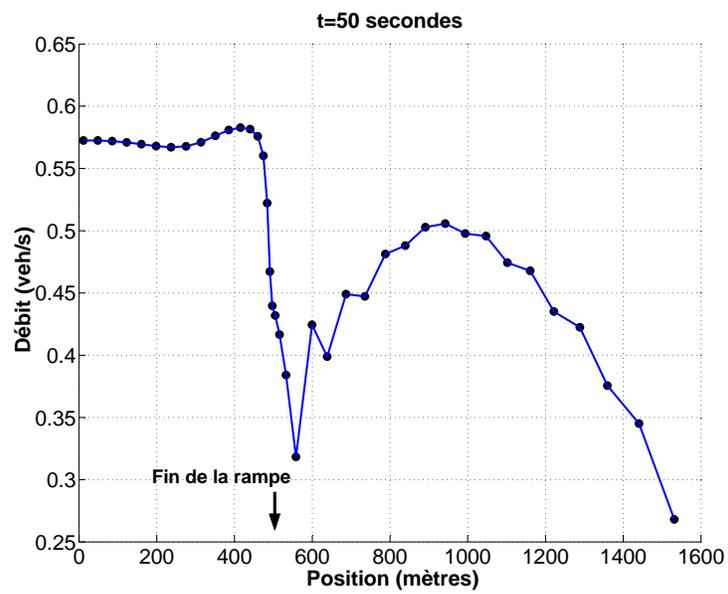


FIGURE 7.4 – Positions des véhicules sur la bande 1 : les véhicules initialement sur cette bande sont représentés par des lignes noires ; ceux qui proviennent de la rampe d'accès sont en rouge.

FIGURE 7.5 – Evolution du débit le long de la bande de gauche, après  $t = 50$  secondes.

## 7.2 Trafic sur deux bandes

A l'occasion de la deuxième partie de ce mémoire, deux résultats de stabilité capitaux ont été dérivés pour un trafic contrôlé sur une bande. Disposant maintenant d'un outil pour décrire un trafic sur plusieurs bandes, une question naturelle s'élève :

*Tout trafic converge-t-il vers une situation d'équilibre dans le cas d'une conduite assistée sur plusieurs bandes, et ce quel que soit son état initial (distribution arbitraire des véhicules aussi bien longitudinalement que latéralement) ?*

La notion d'équilibre sous-entendue ici est fort différente de celle qui a été utilisée jusqu'à présent ; sur une bande, l'équilibre est atteint lorsque les espacements entre véhicules ainsi que leurs vitesses sont constants dans le temps. Dès lors qu'on considère un schéma à plusieurs bandes -et que les dépassements sont possibles, l'équilibre apparaît quand chaque utilisateur roule à sa vitesse préférentielle puisque c'est le but recherché de chacun. On comprend aisément que les espacements ne peuvent plus être constants dans le temps. La complexification de l'évolution du trafic induite par le processus de changement de bande ne permet malheureusement plus de décrire de façon analytique la dynamique des véhicules. Il faudrait en effet considérer deux systèmes dynamiques de tailles variables (représentant chacun une bande) interagissant entre eux puisque des variables d'état pourraient disparaître subitement d'un des systèmes pour se rajouter à l'autre, le tout de façon conditionnelle. C'est donc numériquement que nous menons nos investigations.

### 7.2.1 Présentation de l'outil informatique

Nous avons implémenté sous MATLAB un simulateur combinant l'ACC (mouvement longitudinal) au MOBIL (mouvement latéral). La structure du programme est reprise à la Fig. 7.6. La Fig. 7.7 est une capture d'écran de ce simulateur. La plus grande difficulté quand on s'intéresse à un tel trafic est de rendre à travers les deux dimensions du papier le comportement d'un système qui en comporte trois (le temps, la distance le long de la route et la bande choisie). C'est pourquoi nous fournirons quelques captures d'écran du simulateur en guise de résultats.

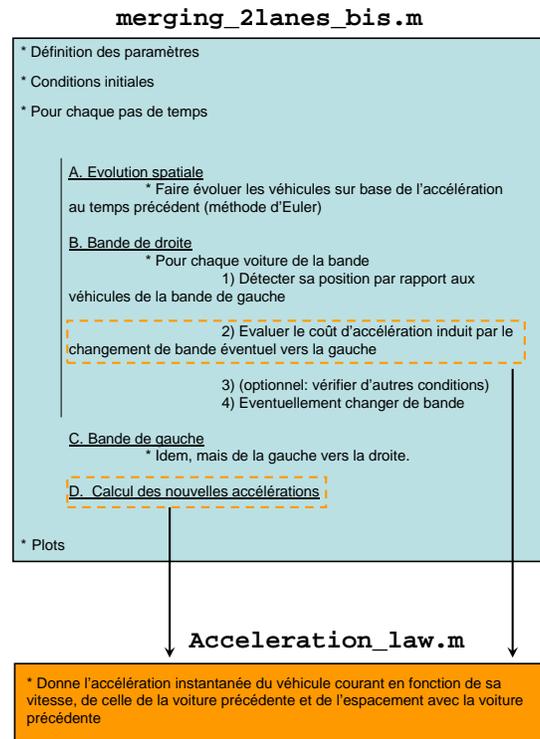


FIGURE 7.6 – Algorithme MATLAB de changement de bande

### Evolution du trafic

Nous allons considérer plusieurs expériences au départ de la même condition initiale (Fig. 7.7) : 10 voitures aux vitesses préférentielles prises entre 30 km/h et 120 km/h par pas de 10 km/h sont réparties sur les deux bandes de façon désordonnée.

Le changement de bande ne s'effectue, pour rappel (Section 6.2.3) que si la condition

$$(\tilde{a}_c - a_c) + p[(\tilde{a}_n - a_n) + (\tilde{a}_o - a_o)] \geq \Delta a \quad (7.1)$$

est satisfaite, c'est-à-dire si la somme pondérée des gains d'accélération des voitures concernées est supérieur à un certain seuil. Prenons pour commencer  $p = 1$  et  $\Delta a = 0$ . Le changement de bande n'a lieu que si le gain global moyen d'accélération

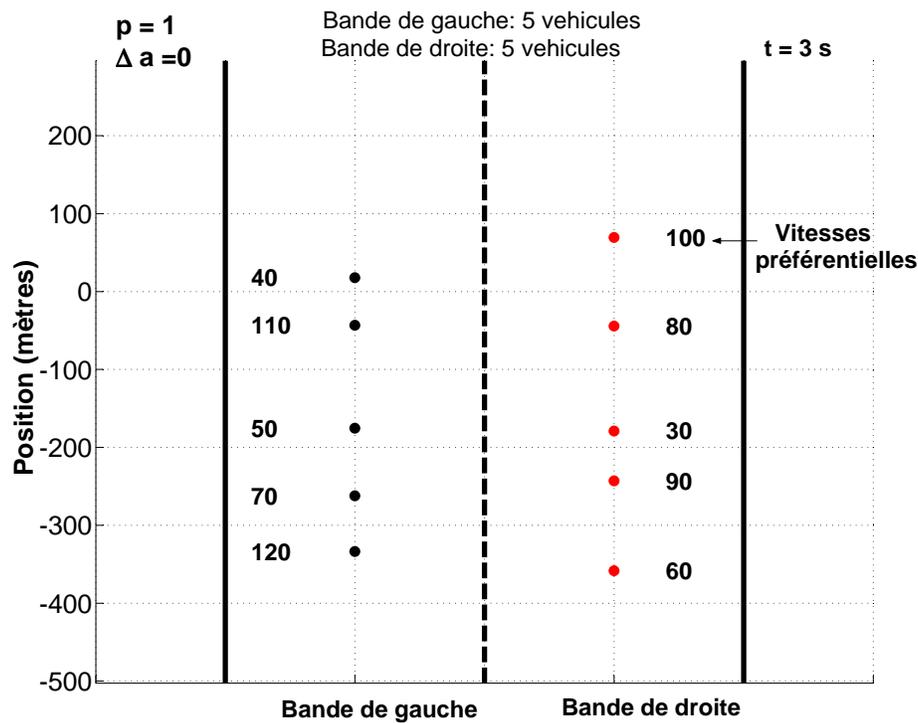


FIGURE 7.7 – Répartition initiale des véhicules (représentés à côté de leurs vitesses préférentielles) sur les deux bandes

est positif. Le simulateur converge vers une situation stable (Fig. 7.8) car les voitures sont classées par ordre croissant de vitesses préférentielles, mais le trafic reste (et restera indéfiniment) établi sur deux bandes. C'est normal : la première voiture de la bande de gauche (ayant une vitesse préférentielle de 110 km/h) n'a pas intérêt à se rabattre sur la droite car si elle le fait, elle occasionne un ralentissement pour elle-même et pour la voiture souhaitant rouler à 100 km/h. De la même manière, si l'on prend  $p = 0$  et  $\Delta a = 0$  (c'est-à-dire un comportement égoïste pour lequel un changement de bande n'est effectué que lorsqu'il est profitable à la voiture courante), on retombe sur un trafic bien classé mais qui reste sur deux bandes car la première voiture de la bande de gauche devrait ralentir si elle se rabattait à droite.

On pourrait alors penser à garder  $p$  tel qu'il est mais à abaisser le seuil  $\Delta a$  par exemple à  $-2$  m/s<sup>2</sup>. Ce faisant, on permettrait aux voitures de tête de la bande

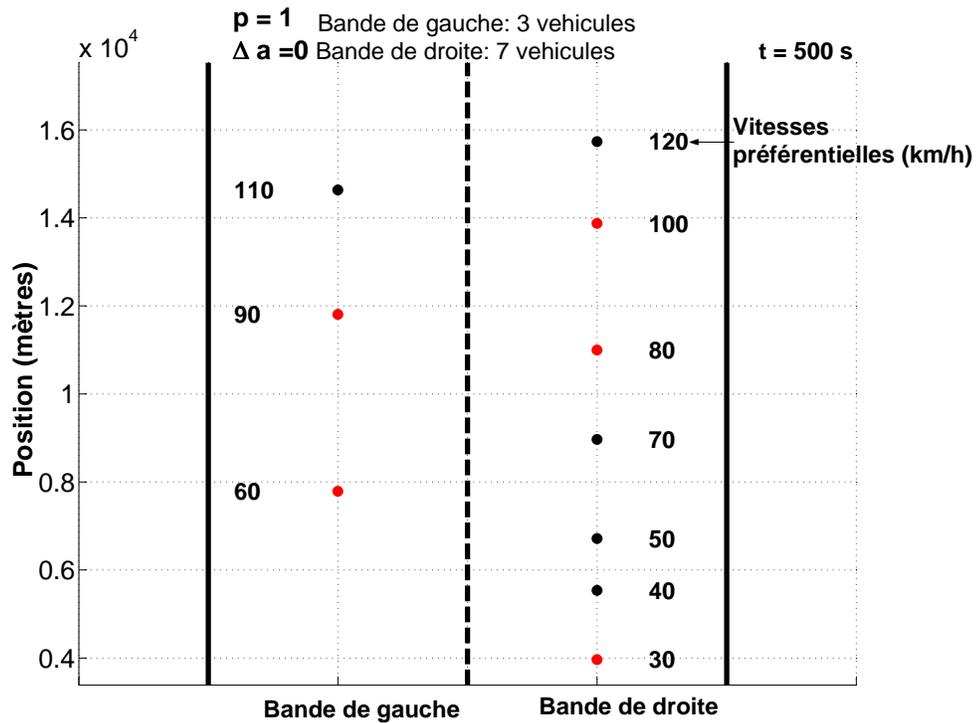


FIGURE 7.8 – Le trafic est stabilisé mais occupe les deux bandes

de gauche de se déporter sur leur droite tant qu'elles ne perdent pas plus de  $2 \text{ m/s}^2$  dans la manœuvre. En examinant cette situation de plus près (Fig. 7.9), on constate cependant qu'un bouchon est créé par la voiture désignée par "40" sur cette figure. En nous aidant de l'historique des changements de bande mis au point dans notre simulateur, on constate que la voiture désignée par "100" sur cette capture d'écran, change de bande constamment puisque son gain d'accélération est nul en cas de manœuvre, et donc supérieur à  $\Delta a$ . De la même manière, sa poursuivante change de bande puisque si elle le fait, elle se retrouve derrière la voiture "100" (qui vient de changer de bande) et ne modifie pas sa propre accélération. Toutes les voitures de la bande de droite se déportent donc vers la bande de gauche, puis reviennent à droite, etc.

Pour régler ce problème et pour prendre en compte la règle européenne qui veut que la bande de gauche ne doit pas être occupée lorsque le trafic est stable, nous avons rajouté quelques conditions sur le changement de bande. Pour ce qui

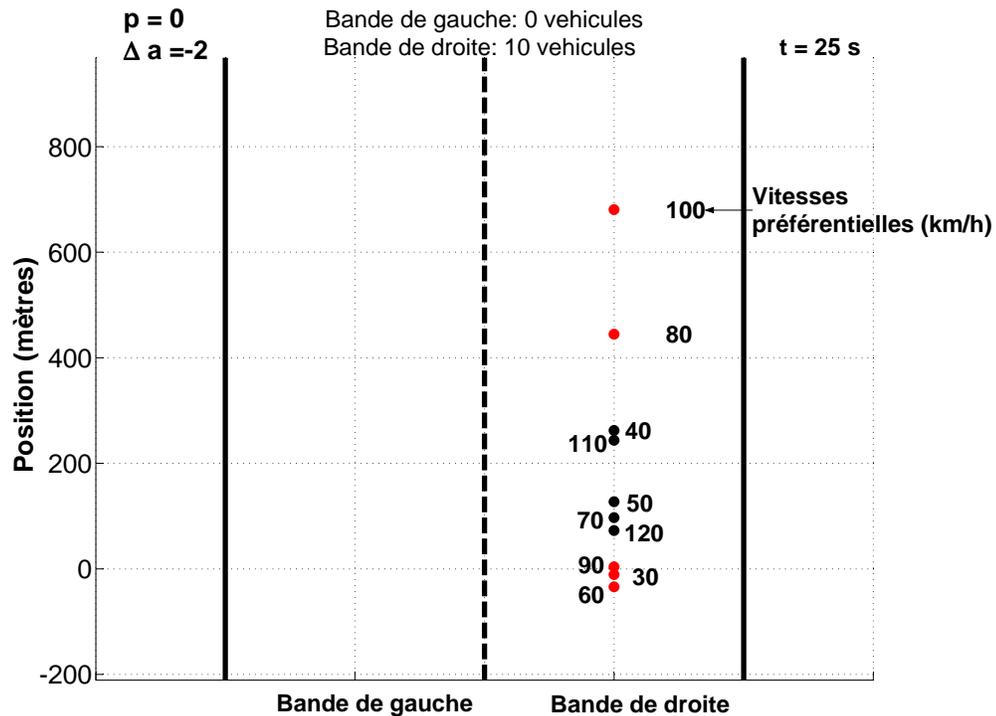


FIGURE 7.9 – La bande de gauche est libérée, mais on assiste à la formation non désirée d'un bouchon (la configuration, représentée ici à  $t = 25$  s par souci de lisibilité, reste identique lorsque  $t$  augmente)

concerne le changement de la **droite vers la gauche**, le changement ne s'effectue que si les deux conditions suivantes sont remplies :

- la relation (7.1) est satisfaite, pour garantir un changement de bande sûr.
- la voiture considérée (se trouvant donc sur la bande de droite) possède une vitesse préférentielle supérieure à celle devant elle.

Pour les changements de la **gauche vers la droite**, l'opération a lieu si les conditions suivantes sont vérifiées :

- la relation (7.1) est satisfaite, pour garantir un changement de bande sûr.
- la voiture considérée (se trouvant donc sur la bande de gauche) est suivie par une voiture souhaitant aller plus vite qu'elle OU la voiture considérée, en cas de changement de bande vers la droite, aurait une vitesse préférentielle supérieure à sa poursuivante et inférieure à son prédécesseur.

Le résultat est très bon puisqu'après 350 secondes, on a atteint l'état désiré de trafic (Fig. 7.10). Les paramètres  $p$  et  $\Delta a$  ont été choisis égaux à 1 et  $-1$  respectivement afin que, lors d'une manoeuvre, les trois véhicules concernés soient à l'abri d'une décélération trop forte. De plus, avec le rajout de conditions supplémentaires énoncées ci-dessus, la voiture de tête ne change plus de bande intempestivement comme c'était le cas auparavant.

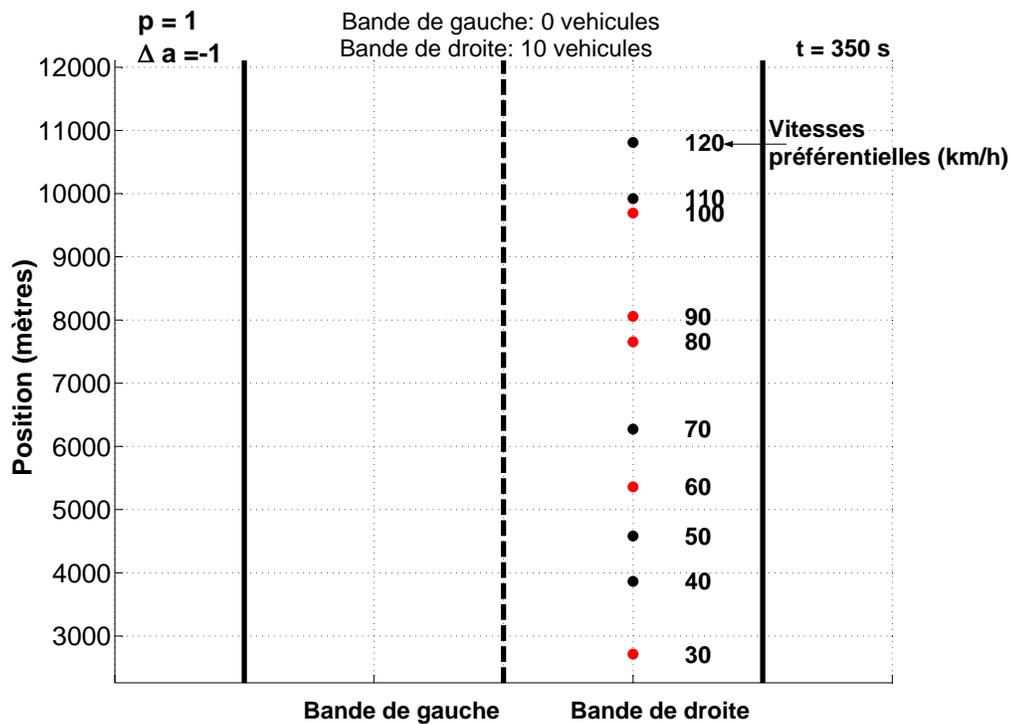


FIGURE 7.10 – Etat d'équilibre du trafic

# Conclusion

La question de l'intensification du transport routier est fondamentalement issue d'un problème de société. Il suffit d'un brin d'observation pour réaliser que la majorité des véhicules sont sous-utilisés (une ou deux personnes à bord pour cinq places disponibles), et que les alternatives sont peu encouragées : un peu plus de 60 % des unités d'établissement ne proposent aucun dédommagement en faveur de leurs salariés en matière de mobilité (source : [23]).

Dans l'attente d'un changement de mœurs, nous avons proposé une approche technique structurée en trois étapes : comprendre, analyser et contrôler.

- L'étude de la congestion du trafic passe par la nécessité de *comprendre* les mécanismes qui gouvernent celui-ci. Nous avons fait le choix d'utiliser la représentation microscopique du trafic car elle prend en compte chaque véhicule individuellement et modélise donc les flux avec un maximum de réalisme.
- Ayant sélectionné un modèle en particulier (modèle en temps discret de Cho et Wu), nous avons ensuite *analysé* les sources d'instabilité du trafic : différenciation des vitesses préférentielles des conducteurs, distances préférentielles de sécurité, intervalle de temps entre deux actualisations de l'état du trafic, ...
- Enfin, nous avons décrit un système de *contrôle* (ACC) augmentant le débit global du trafic. Les auteurs du modèle original n'ayant jamais discuté la question théorique de la stabilité de ce système, nous avons apporté une preuve (sous certaines hypothèses) de la stabilité globale de celui-ci.

La solution que nous avançons améliore donc le trafic global quitte à restreindre la liberté des conducteurs, puisque ces derniers n'ont plus que leur volant comme degré de liberté. Voilà le sacrifice auquel chaque utilisateur doit personnellement consentir afin de satisfaire son propre intérêt et celui de ses congénères.

# Bibliographie

- [1] Aw, A., Rascle, M., *Resurrection of "second order" models of traffic flow*, SIAM J. Appl. Math., **63**, pp.259-278 (2002)
- [2] Cheng, R. J., Ge, H. X., Li, Z. P., *Two velocity difference model for a car following theory*, Physica A **387** pp. 5239-5245 (2008)
- [3] Cho, H.-J., Wu, Y.-T., *Microscopic analysis of desired-speed car-following stability*, Applied Mathematics and Computation **196** pp. 638-645 (2008)
- [4] Davis, L.C., *Effect of adaptative cruise control systems on mixed traffic flow near an on-ramp*, Physica A **379** pp. 274-290 (2007)
- [5] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, Krieger Publishing Co. (1980)
- [6] Hanaura, H., Nagai, R., Nagatani, T., Tanaka, K., *Discontinuity at edge of traffic jam induced by slowdown*, Physica A **364** pp. 464-472 (2006)
- [7] Haut, B., *Modélisation du trafic autoroutier* (Travail de fin d'études), Université Catholique de Louvain (2003)
- [8] Haut, B., *Modelling and control of road traffic networks* (Thèse de doctorat), Université Catholique de Louvain (2007)
- [9] Hidas, P., *Modelling lane changing and merging in microscopic traffic simulation*, Transportation Research Part C **10** pp. 351-371 (2002)
- [10] Hidas, P., *Modelling vehicle interactions in microscopic simulation of merging and weaving*, Transportation Research Part C **13** pp. 37-62 (2005)
- [11] Hoogendoorn, S. P., Bovy, P. H. L., *State-of-the-art of vehicular traffic modelling*, Special Issue on Road Traffic Modelling and Control of the Journal of Systems and Control Engineering, consulté sur [http://www.rstrail.nl/T&E/papers\\_course\\_IV\\_9/state-of-the-art.PDF](http://www.rstrail.nl/T&E/papers_course_IV_9/state-of-the-art.PDF) le 23 mai 2009
- [12] Kesting, A., Treiber, M., Helbing, D., *General Lane-Changing Model MOBIL for Car-Following Models*, Journal of the Transportation Research Board **1999** (2007)
- [13] Kesting, A., Treiber, M., Schönhof, M., Helbing, D., *Adaptative cruise control design for active congestion avoidance*, Transportation Research Part C **16** pp. 668-683 (2008)

- [14] Khalil, H. K., *Nonlinear systems (Second edition)*, Prentice Hall (1996)
- [15] Kita, H., *A merging-giveway interaction model of cars in a merging section : a game theoretic analysis*, Transportation Research Part A **33** pp. 305-312 (1999)
- [16] Laval, J. A., Leclercq, L., *Microscopic modeling of the relaxation phenomenon using a macroscopic lane-changing model*, Transportation Research Part B **42**, pp. 511-522 (2008)
- [17] Lighthill, M. H., Whitham, G. B., *On kinematic waves II : a theory of traffic flow on long, crowded roads*, Proceedings of the Royal Society of London series A, **229**, pp. 317-345
- [18] Matsukidaira, J., Takahashi, D., *On a discrete optimal velocity model and its continuous and ultradiscrete relatives*, consulté sur <http://arxiv.org/abs/0809.1265> le 15 octobre 2008
- [19] McCartney, M., *A discrete time car following model and the bi-parameter logistic map*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **14** pp. 233-243 (2009)
- [20] Nagai, R., Nagatani, T., Tanaka, K., *Traffic jam and discontinuity induced by slowdown in two-stage optimal-velocity model*, Physica A **370** pp. 756-768 (2006)
- [21] Ou, Z.-H., *Density waves in the continuum analog of the full velocity difference model*, Physica A **387** pp. 1799-1806 (2008)
- [22] Renette, E., De Muelenaere, M., *En 2030, le chaos sur nos routes*, paru dans **Le Soir** du 22 avril 2009 (disponible sur <http://archives.lesoir.be>, consulté dernièrement le 24 mai 2009)
- [23] Service Public Fédéral - Mobilité et Transports, *Diagnostic déplacements domicile-travail au 30 juin 2005* (2005), consulté sur <http://www.mobilit.fgov.be/data/mobil/rapportWWVf.pdf> le 24 mai 2009
- [24] Shi, Z., Yu, L., Zhou, B., *Kink-antikink density wave of an extended car-following model in a cooperative driving system*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **13** pp. 2167-2176 (2008)
- [25] Strogatz, S. H., *Nonlinear dynamics and chaos*, Westview Press (2000)
- [26] Sugiyama, Y., *Optimal Velocity model for traffic flow*, Computer Physics Communications **121-122** pp. 399-401 (1999)
- [27] Xiaomei, Z., Ziyu, G., *The stability analysis of the full velocity and acceleration velocity model*, Physica A **375** pp. 679-686. (2007)
- [28] Zhu, W.-X., Jia, L., *Nonlinear Analysis of a Synthesized Optimal Velocity Model for Traffic Flow*, Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) **50** pp. 505-510. (2008)