Méthodes d’assimilation pour l’initialisation de modèles

François Massonnet
UCL/ASTR – 02/12/2009

Félicitations à Chris…

Ma boîte à outils s’agrandit

Exercice de synthèse

- Ce que je ferai
  - Evoquer quelques méthodes d’**assimilation**
  - Comparer ces méthodes entre elles
- Ce que je ne ferai pas
  - Cas de la glace de mer en particulier
- Commentaires en cours de route bienvenus

Plan de l’exposé

1. Définition de la problématique
2. Méthodes élémentaires
3. Méthodes séquentielles
4. Méthodes variationnelles
5. Filtres à particules
6. Comparaison et synthèse

Plan de l’exposé

1. **Définition de la problématique**
2. Méthodes élémentaires
3. Méthodes séquentielles
4. Méthodes variationnelles
5. Filtres à particules
6. Comparaison et synthèse

1. Définition de la problématique

- Observations trop pauvres
- Besoin de conditions initiales fiables

http://nosa.noaa.gov/image/nws/rawinsonde.jpg

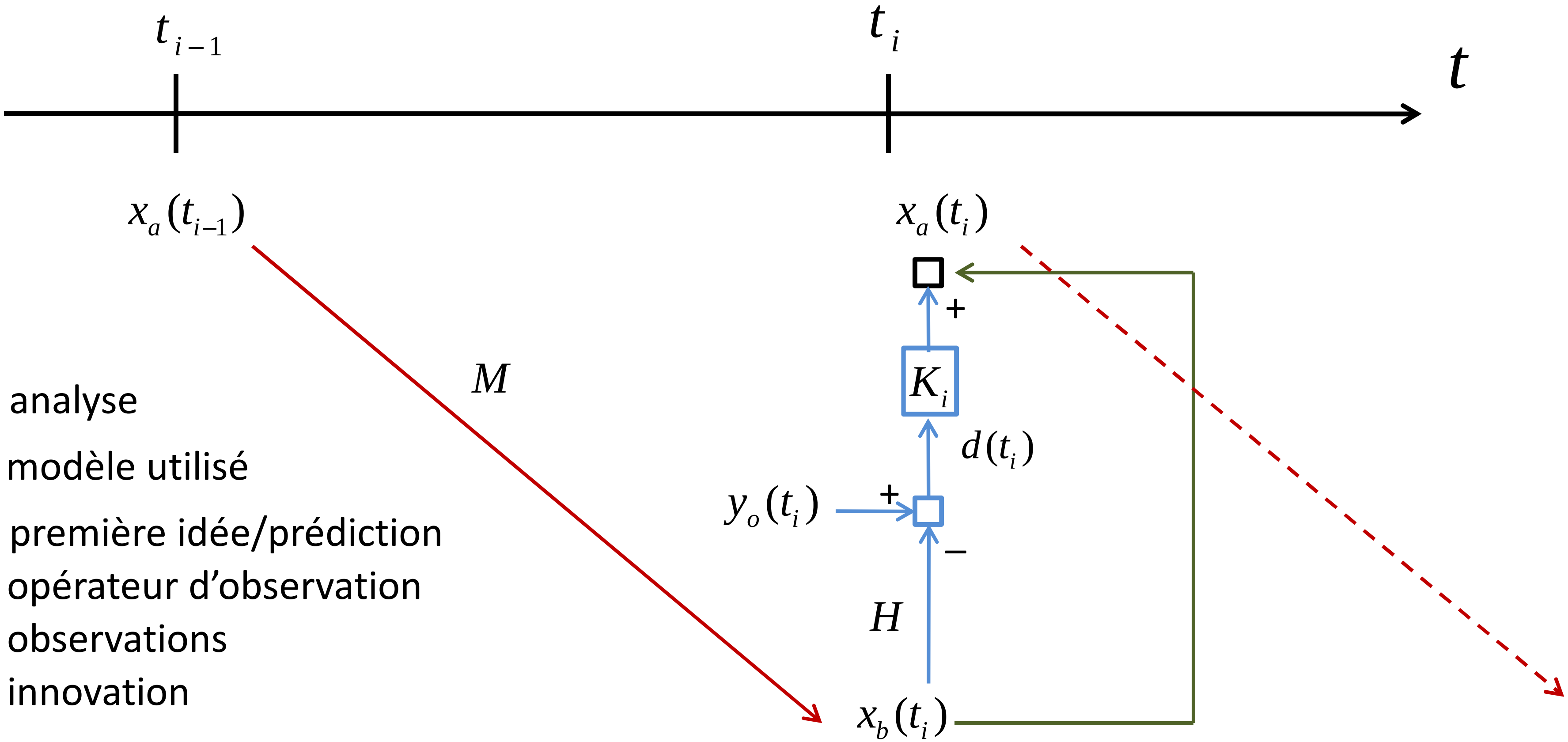
Solution

Joindre **astucieusement** les observations et les prédictions pour produire une analyse cohérente (assimilation)

- Contraintes

1. Définition de la problématique

- Distribution des rôles



x_a : analyse

M : modèle utilisé

x_b : première idée/prédiction

H : opérateur d'observation

y_o : observations

d : innovation

K : gain

Plan de l'exposé

1. Définition de la problématique
2. **Méthodes élémentaires**
3. Méthodes séquentielles
4. Méthodes variationnelles
5. Filtres à particules
6. Comparaison et synthèse

2. Méthodes élémentaires

- Nudging

$$x_a(t_i) = x_b(t_i) + \boxed{\gamma}\left(y_o(t_i) - H(x_b(t_i))\right)$$

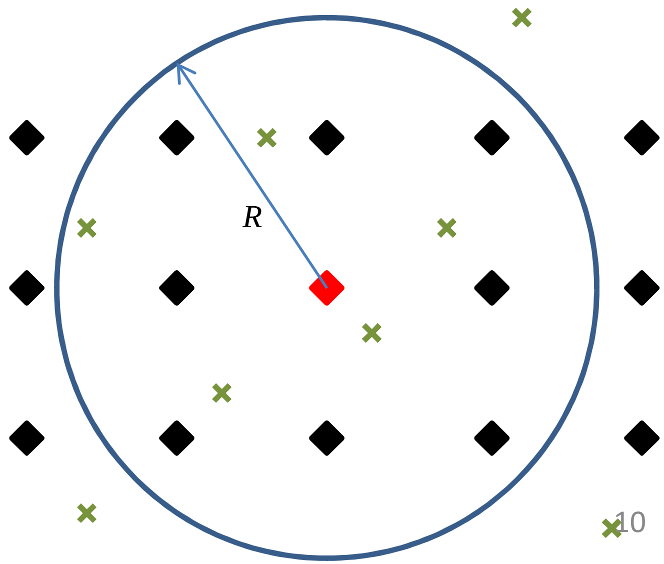
  – Et ses variantes

http://pagesperso-orange.fr/delmonte/images/cerceau10.jpg

- Corrections successives

  Pour chaque point de grille,

$$x_a(t_i) = \underbrace{x_a(t_{i-1})}_{M = I} + \sum_{k \in K} W_{ik}\left(y_o^k(t_i) - H\left(x_a^k(t_{i-1})\right)\right)$$



2. Méthodes élémentaires

- Avantages
  - Simples
  - Peu coûteuses

- Inconvénients
  - Empiriques
  - Arbitraires

Plan de l’exposé

1. Définition de la problématique
2. Méthodes élémentaires
3. **Méthodes séquentielles**
4. Méthodes variationnelles
5. Filtres à particules
6. Comparaison et synthèse

3. Méthodes séquentielles

- Filtre de Kalman (KF)

$$K_i = B_i H^T \left(H B_i H^T + R_i \right)^{-1}$$

Matrice de covariance d’erreurs sur la prédiction

Opérateur d’observation linéarisé

Matrice de covariance d’erreurs sur l’observation

$$x_a(t_i) = x_b(t_i) + K_i \left(y_o(t_i) - H x_b(t_i) \right)$$

$$A_i = \left(I - K_i H \right) B_i \qquad \text{(ou} \quad A_i^{-1} = B_i^{-1} + H^T R_i^{-1} H \text{)}$$

$$x_b(t_{i+1}) = M x_a(t_i)$$

Modèle linéarisé

$$B_{i+1} = M A_i M^T + Q_i$$

Matrice de covariance d’erreurs sur le modèle

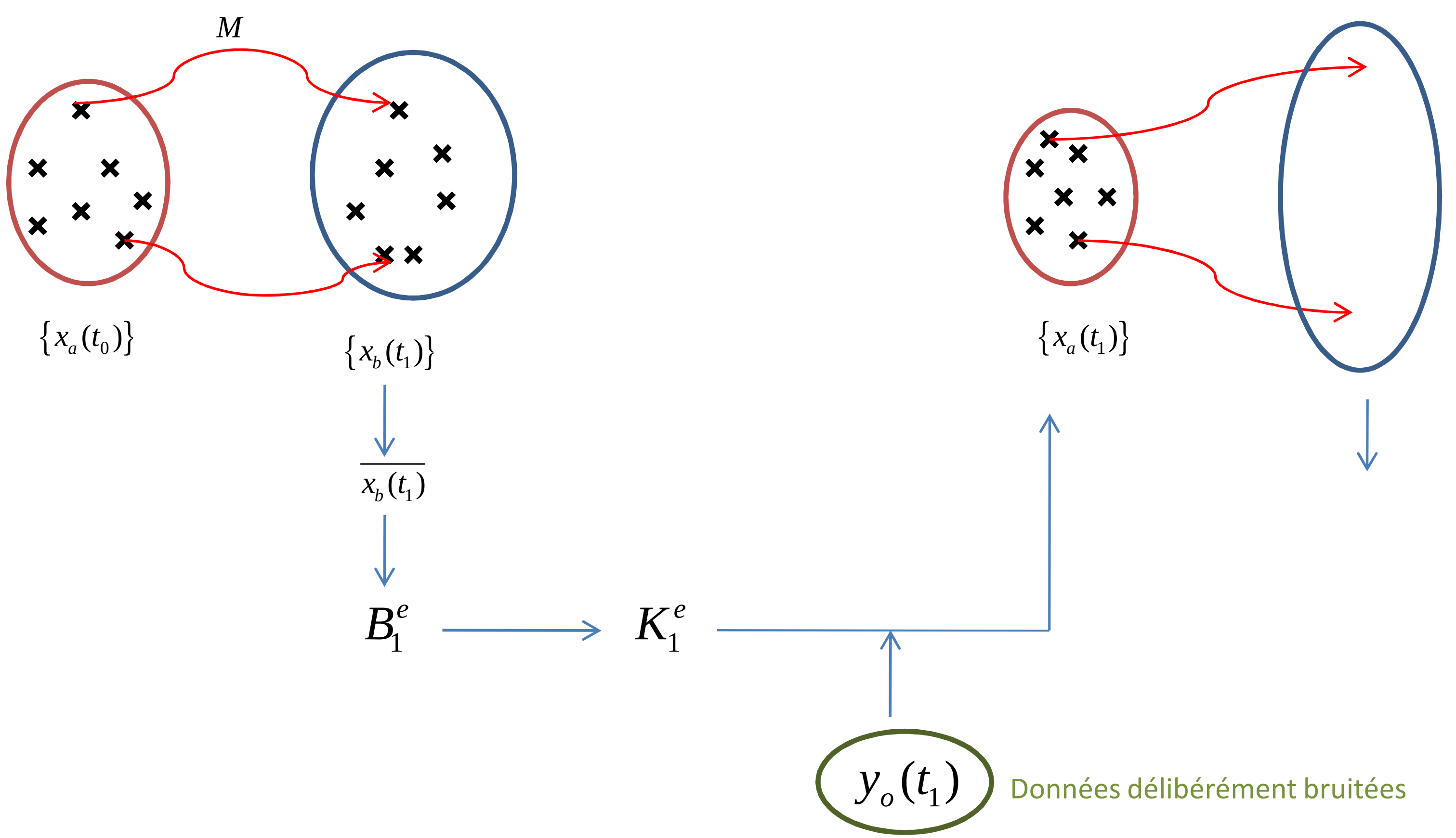
3. Méthodes séquentielles

- Filtre de Kalman (KF) (suite)
  - Impossible à réaliser pour un modèle climatique
  - Minimise la variance d’erreur d’analyse sous linéarité, gaussianité et décorrélation des erreurs (« optimalité »)
  - Question des matrices de covariance d’erreurs

- Filtre de Kalman étendu (EKF)
  - Autorise *H* et *M* non linéaires
  - Linéarisations → ! Fortes non linéarités

3. Méthodes séquentielles

- Filtre de Kalman d'ensemble (EnKF)



3. Méthodes séquentielles

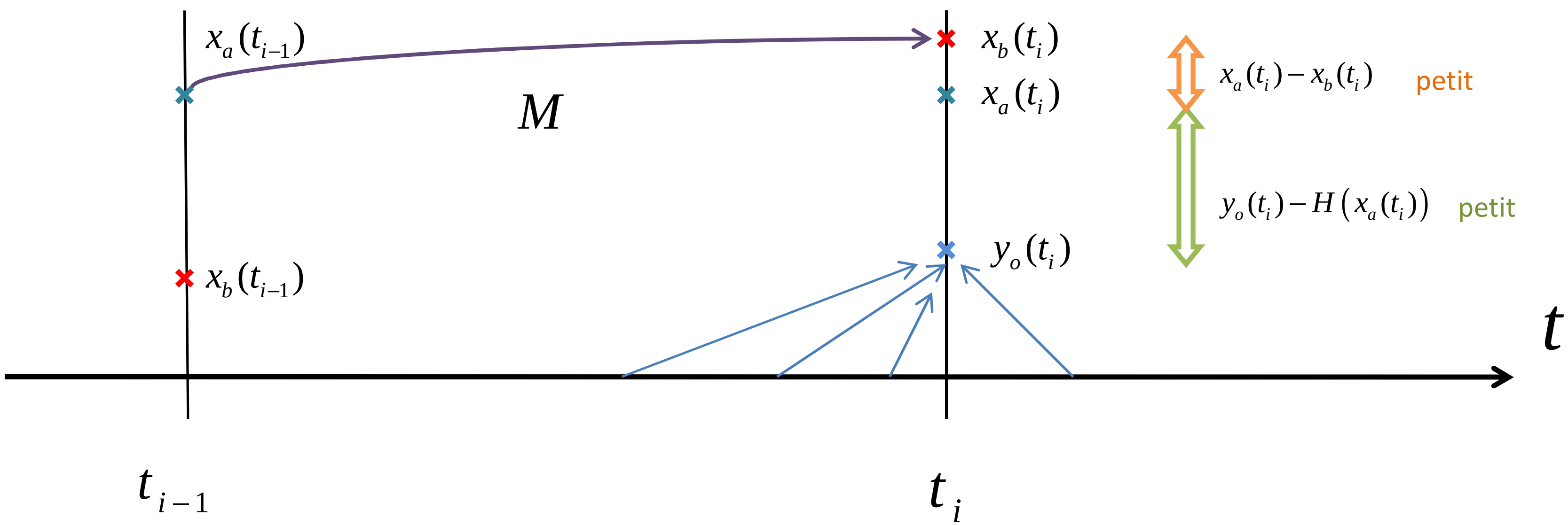
- Filtre de Kalman d’ensemble (EnKF) (suite)
  - Nombre de membres
  - Perturbations initiales
  - Avantages
  - Inconvénients

Plan de l’exposé

1. Définition de la problématique
2. Méthodes élémentaires
3. Méthodes séquentielles
4. **Méthodes variationnelles**
5. Filtres à particules
6. Comparaison et synthèse

4. Méthodes variationnelles

- Minimisation d'une fonction de coût
- 3D-VAR
  - Approche intuitive



4. Méthodes variationnelles

- 3D-VAR (suite)
  - Problème de minimisation…

$$\min_x \underbrace{\left(x - x_b(t_i)\right)^T B_i^{-1} \left(x - x_b(t_i)\right)}_{2J_b(x)}$$

$$+ \underbrace{\left(y_o(t_i) - H(x)\right)^T R_i^{-1} \left(y_o(t_i) - H(x)\right)}_{2J_o(x)}$$

  - … ou de maximisation

$$\max_x \quad p\left(x \middle| x_b(t_i), y_o(t_i)\right) \propto \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(J_b(x) + J_o(x)\right)\right)$$

Th. Bayes + gaussianité

4. Méthodes variationnelles

- 3D-VAR (suite)
  - Opérateur d'observation linéaire

Solution optimale: $x_a(t_i) = x_b(t_i) + (B_i H^T)(R + HB_i H^T)^{-1}\left(y_o(t_i) - H\left(x_b(t_i)\right)\right)$

$$\Leftrightarrow \delta x_a(t_i) = (B_i H^T)(R + HB_i H^T)^{-1}\delta y_o(t_i)$$

KF

  - Physical Space Analysis System (PSAS)

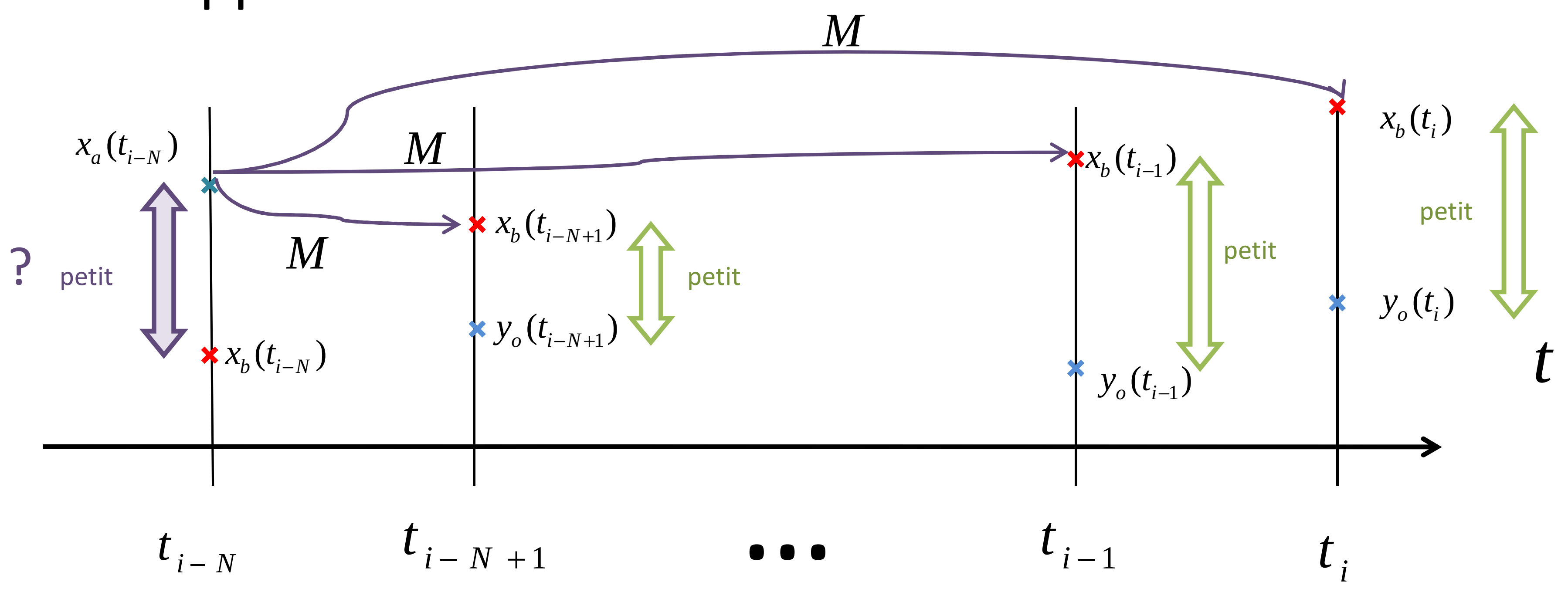
Idée: travailler dans l'espace des observations

1) minimiser $J(w) = \frac{1}{2} w^T \left(R_i + HB_i H^T\right) w - w^T \delta y_o(t_i)$ $\Longrightarrow$ $w = (R_i + HB_i H^T)^{-1}\delta y_o(t_i)$

2) Calculer $\delta x_a(t_i) = (B_i H^T) w$

4. Méthodes variationnelles

- 4D-VAR
  - Approche intuitive



4. Méthodes variationnelles

- 4D-VAR
  - Problème de minimisation

$$\min_{x} \quad \left(x - x_b(t_{i-N})\right)^T B_{i-N}^{-1} \left(x - x_b(t_{i-N})\right)$$

$$+ \sum_{k=i-N}^{i} \left(y_o(t_k) - H\left(x_b(t_i)\right)\right)^T R_i^{-1} \left(y_o(t_k) - H\left(x_b(t_i)\right)\right)$$

$$s.c.$$

$$M_{i-N \to k}(x) = x_b(t_k) \qquad (k = i - N + 1, \ldots, i)$$

Plan de l'exposé

1. Définition de la problématique
2. Méthodes élémentaires
3. Méthodes séquentielles
4. Méthodes variationnelles
5. **Filtres à particules**
6. Comparaison et synthèse

5. Filtres à particules

- Idée intuitive
  - Propager des particules pour évaluer la fonction de densité de probabilité
  - Avantages: hypothèses très larges
  - Inconvénients: coût

Plan de l’exposé

1. Définition de la problématique
2. Méthodes élémentaires
3. Méthodes séquentielles
4. Méthodes variationnelles
5. Filtres à particules
6. **Comparaison et synthèse**

6. Comparaison et synthèse

		Nature	Hyp. sur M, H	Hyp. Sur préd./obs.	Optimise?	Matr. Cov.	Coût	Pertinence
Empiriques	**Nudging**	Déterm.	/	/	Non	/	Peu cher	Discutable
Empiriques	**Corr. Succ.**	Déterm.	/	/	Non	/	Peu cher	Discutable
Séquentielles	**KF**	Déterm.	Lin.	Pas biais, Gaussiens	Min. variance analyse	Propag.	Trop cher	Pertinent (sous hypothèses)
Séquentielles	**EKF**	Déterm.	/	Pas biais, Gaussiens	« Oui »	Propag.	Trop cher	! Modèles fortement non linéaires
Séquentielles	**EnKF**	Stoch.	/	Pas biais, Gaussiens	« Oui »	Estim. + Propag.	Cher	Nombre de membres+ perturbations ?
Variationnelles	**3D-VAR**	Déterm.	/	/	Min. fonction coût = Max. vraisemblance (si lin.)	Modél.	Trop cher (non lin.), interméd. (form. Incrém.)	Pertinent (sous hypothèses)
Variationnelles	**PSAS**	Déterm.	/	/	Oui (sous hyp.)	Modél.	Cher (non lin.), interméd. (lin.)	Pertinent (sous hypothèses)
Variationnelles	**4D-VAR**	Déterm.	/	/	Min. fonction coût = Max. vraisemblance (si lin.)	Modél.	Trop cher, Interméd. (form.incrém.)	Pertinent (sous hypothèses)
MC	**F.à.p.**	Stoch.	/	/ /	?	PDF	Cher	Pertinent

Bibliographie

- Kalnay, E., *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictabilty*, Cambridge University Press (2003)

- Brasseur, P., *Ocean Data Assimilation using Sequential Methods Based on the Kalman Filter*, in. Ocean Weather Forecasting pp. 271-316 (2006)

- Evensen, G., *The Ensemble Kalman Filter: theoretical formulation and practical implementation*, Ocean Dynamics **53** pp. 343-367 (2003)

- Daget, N., *Revue des méthodes d'assimilation*, Technical Report (2007) disponible sur http://www.cerfacs.fr/~daget/cv_fr.html (consulté le 18/11/2009)

- Doucet, A., de Freitas N., Gordon N., *Sequential Monte Carlo Methods in Practice* (Chap. 1), Springer (2001)